(2) $R[s] \subset S$ ist ein endlich erzeugter R-Modul und $s \in \mathrm{rad}(I\, R[s])$

(3) $s \in S' \subset S$, wobei S' ein Unterring ist, welcher als R-Modul endlich erzeugt ist und $s \in \mathrm{rad}(IS')$

Sind die Äquivalenten Bedingungen erfüllt, dann heißt s ganz über I bzw falls $I = R$, ganz über R

Bew: (1) => (2) => (3) klar
(3) => (1) haben wir schon gesehen z.B. beim Bew des Nullstellensatzes. □

$R \subset S$ heißt ganze Ringerweiterung, falls jedes $s \in S$ ganz über R ist.

Def: Sei $S = K[x_1,..,x_n]/I$ ein endlich erzeugte K-Algebra.
Eine Noethernormalisierung besteht aus
(1) $y_1, ..., y_d \in S$ die K-algebraisch unabh. sind.
(2) $K[y_1,..,y_d] \subset S$ ist eine ganze Ringerweiterung.

26.06.18 Thm: $R \subset S \subset T$ Ringerweiterung
Ist S ganz über R und T ganz über S, dann ist T ganz über R

Bem: S endl. erzeugte R-Algebra und $R \subset S$ ganz genau dann, wenn S ein endlich erzeugter R-Modul ist.

(3) => (1) in Def, Satz
Angenommen S' wird als R-Modul von $m_1,..,m_r$ erzeugt und $s^d \in IS'$

$$s^d m_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} m_j$$

für $b_{ij} \in I$. Damit $\det(s^d I - (b_{ij}))$ annuliert $S' \ni 1$ und damit $\det(s^d - (b_{ij})) = 0$.

Bew Thm: Sei $t \in T \supset S$. Dann ex $a_1, .., a_d \in S$ mit

$$t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_d = 0$$

$S' = R[a_1,.., a_d] \subset S$ ganz und endlich erzeugt also ein endlicher R-Modul und t ist ganz über S'
Also $S'[t]$ ist endl. erzeugt als R-Modul, da $a_1^{\alpha_1} .. a_d^{\alpha_d} t^m$ mit $\alpha_i < n_i$, $m < d$ ein R-Modul erz.
Also t ganz über R □

Sei $R \subset S$ eine ganze Ringerweiterung.
Wir fragen, wie Primideale in S mit Primidealen in R zusammenhängen.

$$\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} S \Rightarrow \mathfrak{q} = R \cap \mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} R$$

Wir sagen $\mathfrak{Q}$ liegt über $\mathfrak{q}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} S &\longrightarrow \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{Q} &\longmapsto \mathfrak{q} := \mathfrak{Q} \cap R \end{aligned}$$

Wir zeigen die Abb ist surjektiv.

<u>Thm</u> (Lying over)
$R \subset S$ ganze Ringerweiterung $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$. Dann
(1) Es ex $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} S$ mit $\mathfrak{Q} \cap R = \mathfrak{q}$
(2) Es gibt keine strikte Inklusion zwischen den $\mathfrak{Q}$'s über $\mathfrak{q}$.
(3) $\mathfrak{q}$ ist genau dann maximal, wenn $\mathfrak{Q}$ maximal ist
(4) Ist S noethersch, dann ex nur endl. viele $\mathfrak{Q}$ über $\mathfrak{q}$.

<u>Beweis</u>: (1) Betrachte $U = R - \mathfrak{q}$ und $I = \mathfrak{q}S$
Wir zeigen zunächst $U \cap I = \emptyset$ und wenden dann Krulls Existenzlemma an.
Angenommen $s \in I = \mathfrak{q}S$. Dann ex endl. viele $s_i \in S$ und $r_i \in \mathfrak{q}$ mit

$$s = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$$

Also $s \in \mathfrak{q} R[s_1, \dots, s_n]$. Also ex eine Gleichung

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{q}.$$

Angenommen $s \in \mathfrak{q}S \cap U$. Dann ist $s \in R$ und die Gleichung sagt $s^n \in \mathfrak{q}$, Da $\mathfrak{q}$ prim ist folgt $s \in \mathfrak{q}$ ein Widerspruch.
Sei $\mathfrak{q} \cap U = \emptyset$, also $\mathfrak{q}S \cap U = \emptyset$.
Nach dem Krullschen Lemma sind die maximalen Elemente

$$\mathfrak{Q} \in \{ J \supset \mathfrak{q}S \mid J \cap U = \emptyset \}$$

Primideale. Es gilt $\mathfrak{P} \cap R \supset \mathfrak{p}$ und Gleichheit gilt, da $\mathfrak{P} \cap U = \mathfrak{P} \cap (R - \mathfrak{p}) = \emptyset$.

(2) Angenommen $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2$ sind zwei Primideale über $\mathfrak{p}$.
Dann $\bar{R} = R/\mathfrak{p} \subset S/\mathfrak{P}_1 = \bar{S}$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1 \subset \bar{S}$ erfüllt $(\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1) \cap \bar{R} = (0)$.
Angenommen es ex $s \in \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1$. Dann $\bar{s} \neq 0$ und ganz über $\bar{R}$. Sei $\bar{s}^d + \bar{a}_1 \bar{s}^{d-1} + \dots + \bar{a}_d = 0$ eine ganze Gleichung über $\bar{R}$ von kleinst möglichem Grad.
Dann gilt $\bar{a}_d \in (\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1) \cap \bar{R} = (0)$. Also $\bar{a}_d = 0$ und Division durch $\bar{s} \in \bar{S}$ liefert eine Gleichung kleineren Grades, da $\bar{S}$ ein Integritätsring ist $\lightning$. Also $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1$

(3) Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ maximal, $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_2 \supset \mathfrak{P}$
So folgt $\mathfrak{P}_2 \cap R \supset \mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$ maximal.
somit $\mathfrak{P}_2 \cap R = \mathfrak{p}$ und mit (2) folgt $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ d.h. $\mathfrak{P}$ ist maximal.
Umgekehrt ist $\mathfrak{P}$ maximal, dann ist $\bar{R} = R/\mathfrak{p} \subset \bar{S} = S/\mathfrak{P}$ eine ganze Ringerweiterung mit $S/\mathfrak{P} = \bar{S}$ ein Körper.
Da $(0) \in \operatorname{Spec} \bar{S}$ das einzige Primideal ist und $(0) \subset \bar{R}$ liegt hat $\operatorname{Spec} \bar{R}$ nach (1) und (2) keine weiteren Punkte.
Also ist der Integritätsring $\bar{R}$ ein Körper und damit $\mathfrak{p}$ maximal.

(4) Mit Hilfe der Primärzerlegung werden wir das später zeigen.

<u>Korollar</u>: (Going up thm von Cohen–Seidenberg)
$R \subset S$ ganze Ringerweiterung $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{P}_1 \in \operatorname{Spec} S$ ein Primideal über $\mathfrak{p}_1$.
Dann ex $\mathfrak{P}_2$ über $\mathfrak{p}_2$ mit $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{P}_1 & \subset & \mathfrak{P}_2 & \subset & S \\ | & & \exists \, \vdots & & | \\ \mathfrak{p}_1 & \subset & \mathfrak{p}_2 & \subset & R \end{array}$$

Beweis: Wir wenden den Satz auf $\bar{R} = R/\mathfrak{p}_1 \subset \bar{S} = S/\mathfrak{P}_1$ an und das Primideal $\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec} \bar{R}$.
Liegt $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \bar{S}$ über $\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$, so ist

$$\pi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{P}_2 \in \operatorname{Spec} S \quad , \quad \pi : S \to S/\mathfrak{P}_1$$

mit $\mathfrak{P}_2 \supset \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ über $\mathfrak{p}_2$.

Korollar: $R \subset S$ ganze Ringerweiterung
Dann gilt

$$\dim R = \dim S$$

Beweis: Sei $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_e$ eine Primidealkette in S, dann ist $\mathfrak{p}_i = R \cap \mathfrak{P}_i$ eine Primidealkette in R und $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ ist strikt nach (2) im Satz.
Umgekehrt: Ist $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_e$ eine Kette in $\operatorname{Spec} R$, dann startend mit einem $\mathfrak{P}_0$ über $\mathfrak{p}_0$ können wir die Kette sukzessive zu einer Kette

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_e \in \operatorname{Spec} S$$

über

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_e$$

erweitern und $\dim R = \dim S$ folgt.

Def. $R \subset T$ eine Ringerweiterung
Der ganze Abschluss von R in T ist

$$S = \{ s \in T \mid s \text{ ist ganz über } R \}$$

Dies ist ein Ring, da mit $s_1, s_2 \in S$ auch

$$s_1 + s_2 \,,\; s_1 \cdot s_2 \in R[s_1, s_2]$$

gilt und dies ist ein endl. erzeugter R-Modul.
Ein Integritätsring R heißt <u>normal</u>, wenn der ganze Abschluss $\tilde{R}$ von R in $Q(R)$ mit R übereinstimmt.
Im allgemeinen nennt man $\tilde{R}$ die Normalisierung von R und $\tilde{R}$ ist stets normal.

Bem: Im allgemeinen ist es nicht richtig, dass $\tilde{R}$ eine endlich erzeugte R-Algebra ist.

Aber im Fall $R = K[X_1, \dots, X_n]/_I$ oder $Q(R) = K$ ein Zahlkörper von endlichem Grad über $\mathbb{Q}$, dann ist $\tilde{R}$ endlicher R-Modul.

<u>Satz</u>: Ist R ein faktorieller Integritätsring, dann ist R normal.

<u>Beweis</u>: Angenommen $s \in Q(R)$ ist ganz über R.
Da R faktoriell ist können wir $s = p/q$ schreiben mit $p, q \in R$ teilerfremd.
Ist $s^d + a_1 s^{d-1} + \dots + a_d = 0$ eine ganze Gleichung für s, also $a_i \in R$, dann gilt

$$p^d = -q\,(a_1 p^{d-1} + a_2 p^{d-2} q + \dots + a_d q^{d-1})$$

So folgt $q \mid p^d$
Da R faktoriell ist teilt jeder Teiler von q auch p, also $p/q \in R$.

<u>Thm</u>: (Going down Thm, Cohen-Seidenberg)
$R \subset S$ ganze Ringerweiterung $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{P}_2$ ein Primideal über $\mathfrak{p}_2$. Dann ex $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2$ über $\mathfrak{p}_1$. Dabei seien R, S Integritätsring und R normal.

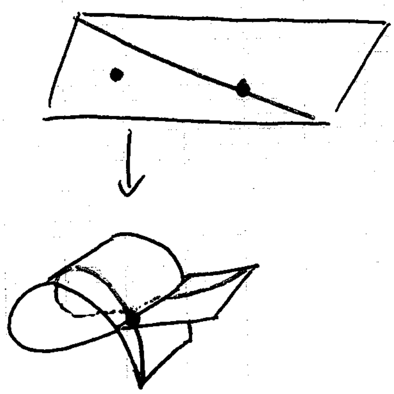
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}_1 & \subset & \mathfrak{P}_2 \\ \exists\,\vdots & & \\ \mathfrak{p}_1 & \subset & \mathfrak{p}_2 \end{array}$$

<u>Bsp</u>: $f: K[X,Y,Z] \to K[x,t]$, $\operatorname{Kern} f = (Z^2 - Y^2(Y+1))$;

$$\begin{aligned} X &\mapsto x \\ Y &\mapsto t^2 - 1 \\ Z &\mapsto t(t^2-1) \end{aligned}$$

$$R = K[X,Y,Z]/(Z^2 - Y^2(Y+1)) \hookrightarrow K[x,t]$$

Spec S



Spec R

$\mathfrak{P}_1 = (x - t)$
Urbilder von $\mathfrak{p}_2$ sind
$\mathfrak{P}_2 = (x-1, t-1)$, $\mathfrak{P}_2' = (x-1, t+1)$
zu $\mathfrak{P}_2'$ über $\mathfrak{p}_2$ ex $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2'$ mit $\mathfrak{P}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$

$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}_1 \cap R = (\bar{X}^2 - 1 - \bar{Y}, \bar{X}(\bar{X}^2 - 1) - \bar{Z})$

$\mathfrak{p}_2 = (\bar{X} - 1, \bar{Y}, \bar{Z})$

R ist nicht normal, da $t = \bar{z}/\bar{y} \in Q(R)$ ganz über R aber nicht in R.

Für Beweis brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma: Sei R ein Integritätsring und R normal. mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und $L \supset K$ eine Körpererweiterung. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal.
Ist $s \in L$ ganz über R (über $\mathfrak{p}$), dann ist s algebraisch über K und das Minimalpolynom

$$p = X^d + c_1 X^{d-1} + \dots + c_d \in K[X]$$

von s hat Koeffizienten $c_1, \dots, c_d \in R$ (bzw in $\mathfrak{p}$).

Beweis: Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

$$K[s] \hookrightarrow \bar{K}$$

Zu jeder Nullstelle $s_1, \dots, s_d$ von p in $\bar{K}$ existiert ein Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(\bar{K}|K)$, der s auf s_i abbildet
Also ist $g(s) = 0$ für $g \in K[X]$, dann gilt auch $g(s_i) = 0$
Mit s sind auch die $s_1, \dots, s_d$ ganz über R. (bzw $\mathfrak{p}$)
Die Koeff. c_i sind Polynome in den s_i

$$p(X) = \prod_i (X - s_i)^{e_i}$$

Die $c_i \in K$ sind also ganz über R. Da R normal ist folgt $c_i \in R$ und falls s ganz über $\mathfrak{p}$ ist, ist $c_i \in \mathfrak{p}$ $\square$

29.06.18 Beweis (Going down thm)
Wir betrachten drei multiplikative Mengen in S:

$$U_1 = R - \mathfrak{p}_1 \quad , \quad U_2 = S - \mathfrak{P}_2$$

$$U = U_1 \cdot U_2 = \{ r \cdot s \mid r \in U_1, s \in U_2 \}$$

Wir zeigen $\mathfrak{p}_1 S \cap U = \emptyset$ und wenden anschließend Krulls Existenzlemma an.

Schritt 1: Sei $s \in \mathfrak{p}_1 S \cap U$.
Da s ganz über $\mathfrak{p}_1$ ist, hat das Minimalpolynom von $s \in L = Q(S) \supset Q(R)$ die Gestalt

$$p(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d \in R[X] \subset Q(R)[X]$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{p}_1$