R ist nicht normal, da $t = \bar{z}/\bar{y} \in Q(R)$ ganz über R aber nicht in R.

Für Beweis brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma: Sei R ein Integritätsring und R normal. mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und $L \supset K$ eine Körpererweiterung. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal.
Ist $s \in L$ ganz über R (über $\mathfrak{p}$), dann ist s algebraisch über K und das Minimalpolynom

$$p = X^d + c_1 X^{d-1} + \dots + c_d \in K[X]$$

von s hat Koeffizienten $c_1, \dots, c_d \in R$ (bzw in $\mathfrak{p}$).

Beweis: Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

$$K[S] \hookrightarrow \bar{K}$$

Zu jeder Nullstelle $s_1, \dots, s_d$ von p in $\bar{K}$ existiert ein Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(\bar{K}|K)$, der s auf s_i abbildet.
Also ist $g(s) = 0$ für $g \in K[X]$, dann gilt auch $g(s_i) = 0$
Mit s sind auch die $s_1, \dots, s_d$ ganz über R. (bzw $\mathfrak{p}$)
Die Koeff. c_i sind Polynome in den s_i

$$p(X) = \prod_i (X - s_i)^{e_i}$$

Die $c_i \in K$ sind also ganz über R. Da R normal ist folgt $c_i \in R$ und falls s ganz über $\mathfrak{p}$ ist, ist $c_i \in \mathfrak{p}$ $\square$

29.06.18 Beweis (Going down thm)
Wir betrachten drei multiplikative Mengen in S:

$$U_1 = R - \mathfrak{p}_1, \quad U_2 = S - \mathfrak{P}_2$$

$$U = U_1 \cdot U_2 = \{ r \cdot s \mid r \in U_1, s \in U_2 \}$$

Wir zeigen $\mathfrak{p}_1 S \cap U = \emptyset$ und wenden anschließend Krulls Existenzlemma an.

Schritt 1: Sei $s \in \mathfrak{p}_1 S \cap U$.
Da s ganz über $\mathfrak{p}_1$ ist, hat das Minimalpolynom von $s \in L = Q(S) \supset Q(R)$ die Gestalt

$$p(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d \in R[X] \subset Q(R)[X]$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{p}_1$

Da $s \in U$ ist, hat es eine Darstellung

$$s = r\tilde{s} \quad , r \in U_1 \quad , \tilde{s} \in U_2$$

Dann ist das Minimalpolynom von $\tilde{s}$

$$\tilde{p}_{\tilde{s}}(X) = X^d + \frac{a_1}{r} X^{d-1} + \dots + \frac{a_d}{r^d},$$

welches nach dem Lemma Koeffizienten in R hat.

Da die $a_i \in \mathfrak{p}_1$ sind, aber $r \notin \mathfrak{p}_1$ ist, gilt:

$r^i \frac{a_i}{r^i} = a_i \in \mathfrak{p}_1$ und damit $\frac{a_i}{r^i} \in \mathfrak{p}_1$.

Also ist $\tilde{s}$ ebenfalls ganz über $\mathfrak{p}_1$ und $\tilde{s} \in \mathrm{rad}(\mathfrak{p}_1 S) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{p}_2 S)$ und $\mathrm{rad}(\mathfrak{p}_2 S) \subset \mathfrak{P}_2$, ein Widerspruch zu $\tilde{s} \in U_2 = S - \mathfrak{P}_2$.

Also $U \cap \mathfrak{p}_1 S = \emptyset$.

<u>Schritt 2</u>: Nach Krulls Existenzlemma $\exists\, \mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{p}_1 S$ mit $\mathfrak{P}_1 \cap U = \emptyset$. Daraus folgt $\mathfrak{P}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$ und aus $\mathfrak{P}_2 \cap U_2 = \emptyset$ folgt $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2$.

<u>Thm</u>: Jede maximale Kette von Primidealen in $K[X_1, \dots, X_n]$

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_e$$

hat Länge $e = n$. Insbesondere $\dim K[X_1, \dots, X_n] = n$.

<u>Korollar</u>: $R = K[X_1, \dots, X_n]/I$ ein Integritätsring.

Dann gilt

$$d = \dim R = \dim V(I)$$

und jede maximale Primidealkette hat Länge d.

<u>Beweis</u>: Mit Going up und einer Noether-normalisierung $K[Y_1, \dots, Y_d] \subset R$.

<u>Primärzerlegung</u>

$R = K[X_1, \dots, X_n]/I$, $V(I) = C_1 \cup \dots \cup C_r$ irreduzible Komponenten, $\mathrm{rad}\, I = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_r$

Wir wollen eine ähnliche Zerlegung für beliebige Ideale in noetherschen Ringen R zeigen.

Def: $\mathfrak{q} \subset R$ heißt Primärideal, falls aus $fg \in \mathfrak{q}$ folgt, dass $f \in \mathfrak{q}$ ist oder ein $n \in \mathbb{N}$ ex mit $g^n \in \mathfrak{q}$.

Prop:

(1) Wenn $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist, dann ist $\mathfrak{p} = \operatorname{rad} \mathfrak{q}$ ein Primideal. Man sagt $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{p}$-Primär.

(2) Der Durchschnitt von endlich vielen $\mathfrak{p}$-primär-Idealen ist $\mathfrak{p}$-primär.

Bew: (1) $fg \in \operatorname{rad} \mathfrak{q}$ und $f \notin \operatorname{rad} \mathfrak{q}$, dann ist $f^n \notin \mathfrak{q}$ für alle n und damit $g^m \in \mathfrak{q}$ für ein m, also $g \in \operatorname{rad} \mathfrak{q}$.

(2) $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ $\mathfrak{p}$ primär und $fg \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \subset \mathfrak{q}_1$

Angenommen $g \notin \operatorname{rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}$, dann ist $g^n \notin \mathfrak{p} = \operatorname{rad} \mathfrak{q}_1 = \operatorname{rad} \mathfrak{q}_2$ für alle n, also $g^n \notin \mathfrak{q}_1$, $g^n \notin \mathfrak{q}_2$ für alle n und $f \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$.

Dabei gilt $\operatorname{rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = \operatorname{rad}(\mathfrak{q}_1) \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}$

Def: $I \subset R$ Ideal. Eine Primärzerlegung von I ist eine Darstellung von I der Form

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_2$$

als endlicher Durchschnitt von Primäridealen.

Eine Primärzerlegung heißt irredundant, wenn

(1) kein $\mathfrak{q}_i$ weggelassen werden kann

(2) $\mathfrak{p}_i = \operatorname{rad} \mathfrak{q}_i$ paarw versch. Primideale sind.

Durch weglassen und Zusammenfassen kann man eine Irredundante Zerlegung erreichen.

Thm: (Emmy Noether, Lasker für Polynomringe)

In einem noetherschen Ring hat jedes Ideal eine Primärzerlegung.

Beweis: In drei Schritten

Schritt 1: Ein Ideal $I \subset R$ heißt irreduzibel, wenn aus $I = J_1 \cap J_2$ entweder $I = J_1$ oder $I = J_2$ folgt.
Mit noetherscher Induktion folgt jedes Ideal $I \subset R$ ist der Durchschnitt von endlich vielen irreduziblen Idealen.

Schritt 2: Sei I ein irreduzibles Ideal.
Wir zeigen, dass I ein Primärideal ist.
Seien $f, g \in R$ mit $f \cdot g \in I$, $f \notin I$.
Dann müssen wir $g \in \mathrm{rad}(I)$ zeigen

$$I : g \subset I : g^2 \subset \dots \subset I : g^n \subset \dots$$

Diese Kette wird stationär, es ex. also $m \in \mathbb{N}$ mit

$$I : g^m = I : g^{m+1} = I : g^{m+2} \text{ usw}$$

Dann gilt $(I : g^m) \cap (I + (g^m)) = I$
In der Tat $a + h \cdot g^m$, $a \in I$, $h \in R$ im Durchschnitt, dann gilt

$$(a + h g^m) g^m \in I,$$

also $h g^{2m} \in I$ und so $h \in I : g^{2m} = I : g^m$
und $h g^m \in I$ impliziert $a + h g^m \in I$
Aus $f \cdot g \in I$ folgt $f g^m \in I$ und wegen $f \notin I$ gilt $(I : g^m) \supsetneq I$, also $I + (g^m) = I$, was $g^m \in I$ bedeutet.

Schritt 3: Durch Weglassen und Zusammenfassen erreicht man eine irredundante Zerlegung

Beispiel:

$$(XY, Y^2) = \underbrace{(Y)}_{(Y)\text{-Primär}} \cap \underbrace{(X^2, XY, Y^2)}_{(X,Y)\text{ Primär}} = (Y) \cap (Y^2, XY, X^n$$

Thm 1: (Erste Eindeutigkeitssatz)
Sei $I = \bigcap_{j=1}^{t} Q_j$ eine irredundante Primärzerlegung
Dann sind die Primideale $P_i = \mathrm{rad}\, Q_i$ präzise die Primideale in der Menge

$$\{ (I : f) \mid f \in R - I \}$$

Mit anderen Worten die P_i sind die assoziierten Primideale zu dem R-Modul R/I.

Beweis: Da $I \subsetneq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{t} \mathfrak{q}_i$ ex $h \in \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{t} \mathfrak{q}_i - I$

und $h \notin \mathfrak{q}_j$.

Es gilt $\mathfrak{q}_j \subset I : h$, da $h \cdot \mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{q}_j$.

Sei $I : f$ maximal in der Menge

$$\{ I : g \mid g \notin I,\ I : g \supset \mathfrak{q}_j \}$$

So ist $I : f$ ein assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$ und deshalb prim.

Für $h \cdot g \in I : f$ und $h \notin I : f$ gilt $h \in I : gf \supset I : f$ und aus der Maximalität folgt $g \in I : f$.

Als nächstes zeigen wir $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_j = \mathfrak{p}$.

Es gilt $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{p}$.

Sei $g \in \mathfrak{p}$. Es gilt $g f \in \mathfrak{q}_j$, $f \notin \mathfrak{q}_j$, also $g^n \in \mathfrak{q}_j$ und $\mathfrak{p} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{q}_j$.

Schließlich müssen wir zeigen, dass jedes assoziierte Primideal von R/I vorkommt

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$$

$$R/I \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{t} R/\mathfrak{q}_j$$

$$g \longmapsto (\bar{g}, \dots, \bar{g})$$

Also $\operatorname{Ass}(R/I) \underset{\text{Übung}}{\subset} \operatorname{Ass}(\bigoplus R/\mathfrak{q}_j) = \bigcup \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{q}_j)$ und $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{q}_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$ gilt mit den selben Argumenten wie oben.

Def. Die minimalen Elemente von $\operatorname{Ass}(R/I)$ nennt man minimale Primideale von I.

Minimale Elemente

$$\{ \mathfrak{P} \mid \mathfrak{P} \supset I \} = V(I) \subset \operatorname{Spec} R.$$

Diese entsprechen den Komponenten von $V(I) \subset \mathbb{A}^n$, falls $I \subset \bar{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Die anderen assoziierten Primideale nennt man eingebettet.

$$(XY, Y^2) = (Y) \cap (Y^2, X)$$

(Y)

(X,Y) eingebettet

<u>Bem</u>: $\operatorname{rad} I = \bigcap_{\mathfrak{P} \supset I \text{ minimal}} \mathfrak{P}$

<u>Thm 2</u>: (Eindeutigkeitssatz)
Sei $I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$ eine irredundante Primärzerlegung und $\mathfrak{P}$ ein assoziiertes Primideal von R/I. Dann ist

$$\bigcap_{\substack{j \text{ mit} \\ \mathfrak{P}_j \subset \mathfrak{P}}} \mathfrak{q}_j$$

eindeutig durch I bestimmt. Insbesondere sind die $\mathfrak{q}_j$ zu den minimalen $\mathfrak{P}_j$ eindeutig bestimmt.

<u>Beweisidee</u>: Betrachte $i: R \to R_{\mathfrak{P}}$ $\square$