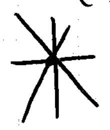
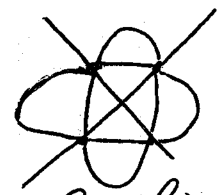
§ 5 Ebene projektive Kurven

03.07.18 Der Raum der ebenen projektiven Kurven ist ein
$\mathbb{P}(L_d)$, $L_d = K[x_0, x_1, x_2]_d = \{ f \in K[x_0, x_1, x_2] \mid f \text{ homogen vom Grad } d \}$

Def. $L \subset L_d$ ein linearer Unterraum
Dann nennen wir $\mathbb{P}(L)$ eine Linearschar von Kurven
Man spricht von einem Büschel, Netz oder Gewebe,
falls $\dim \mathbb{P}(L) = 1, 2$ bzw. 3.

Bsp: $L = \{ \ell \in L_1 \mid V(\ell) \ni (1:0:0) \}$





$V(Q) \ni (1:0:0), (1:1:0)$
Ein Punkt $p \in \mathbb{P}^2$, sodass $p \in C$ für alle $C \in \mathbb{P}(L)$
heißt Basispunkt des Linearsystems $\mathbb{P}(L) = |L|$.
$\mathbb{P}(L) = \{ C \mid C = V(f) \text{ mit } f \in L + \text{Vielfachheit} \}$
Sind $p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{P}^2$ und $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{Z}_{>0}$, dann bezeichnet

$$L(d; r_1 p_1, \ldots, r_s p_s) = \{ f \in L_d \mid \operatorname{mult}_{p_i} f \geq r_i \}$$

O.E. $\{ x_0 = 0 \} \cap \{ p_1, \ldots, p_s \} = \emptyset$. Man nennt $p_1, \ldots, p_s$ zugewiesene Basispunkte
mit $\operatorname{mult}_{p_i} f = \operatorname{mult}_{p_i} f(1, x, y)$

$$K(\mathbb{P}^n) = \left\{ \tfrac{f}{g} \;\middle|\; f, g \text{ homogen vom gleichen Grad} \right\}$$

$$\frac{f^a}{g^a} \mapsto x_0^{\deg f^a - \deg g^a} \frac{f^a\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{g^a\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)}$$

$$= K(\mathbb{A}^n) = K(y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= K\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \cancel{\tfrac{x_n}{x_0}}\right)$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, p} = \left\{ \tfrac{f}{g} \in K(\mathbb{P}^n) \;\middle|\; g(p) \neq 0 \right\}$$

$$p \in U_i \cong \mathbb{A}^n, \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, p} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, p} \supset \mathfrak{m}_{A, p}$$

$$\operatorname{mult}_p f = \min \{ k \mid f \in \mathfrak{m}_{A,p}^k \}$$

<u>Prop</u> $p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{P}^2,\ r_1, \ldots, r_s > 0$

Dann gilt

$$\dim L(d; r_1p_1, \ldots, r_sp_s) \geq \binom{d+2}{2} - \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2}$$

<u>Beweis:</u> Berechne $\dim L(d, rp)$. O.E $p = (1:0:0)$

Für $L(d, rp) \ni f = \sum_{|\alpha|=d} f_\alpha X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$

$$f^d = \sum_{|\alpha|=d} f_\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$$

Es gilt $\operatorname{mult}_p f^d \geq r$ gdw $f_\alpha = 0$ für alle $\deg(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}) <$

Das sind $\binom{r}{2}$ lineare Bedingungen

Für $r \leq d$: $\dim L(d, rp) = \binom{d+2}{2} - \binom{r}{2}$

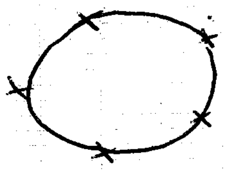
$$L(d; r_1p_1, \ldots, r_sp_s) = \bigcap_{i=1}^{s} \underbrace{L(d; r_ip_i)}_{\text{codim } \binom{r_i}{2}}$$

Es ergibt sich nur eine Ungleichung, da es nicht klar ist, dass diese linearen Bedingungen linear unabhängig sind.

<u>Bsp</u>: $L(2; p_1, \ldots, p_5)$ $\quad p_1, \ldots, p_5$ allg. $\quad \binom{2+2}{2} - 5 = 1$

$\dim L(4; 2p_1, \ldots, 2p_5) \ni q^2$

$\geq \binom{4+2}{2} - 5 \cdot 3 = 0$



q

$f \rightsquigarrow f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, p}$

homogen $\qquad \| $

$\ell(p) \neq 0 \qquad f / \ell^{\deg f}$

Das Ideal (f_p) ist wohldefiniert, da $\ell/\ell' \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, p}$ für $\ell(p) \neq 0 \neq \ell'(p)$ Einheiten sind

<u>Thm</u> (Bézout) f, g homogene Polynome in $K[X_0, X_1, X_2]$ von Grad d bzw e ohne gemeinsame Komponente.

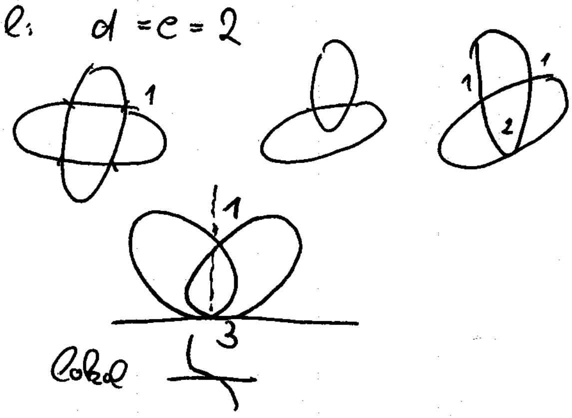
Dann gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} i(f, g; p) = de$$

Dabei $i(f,g;p) = \dim_{K\text{-VR}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(f_p,g_p)$

$= i(f^a, g^a; p) \quad p \in U_0 \cong \mathbb{A}^2.$

Beispiel: $d = e = 2$



Beweis: f, g keine gem. Komponente

Damit $f^a = f(1,X,Y)$ und $g^a = g(1,X,Y)$ haben keine gem. Komponente, also $|V(f^a,g^a)| < \infty$

Das gilt für alle drei Karten und somit $V(f,g)$ endlich, also $i(f,g;p) > 0$ nur in endlich vielen Punkten, die Summe im Satz ist also endlich.

Wähle Koordinatensystem so, dass keine Schnittpunkte auf der Gerade $V(X_0)$ liegen, also $V(X_0,f,g) = \emptyset$

Ferner $V(X_0) \ni (0:1:0) \notin V(f) \cup V(g)$.

Dann gilt für

$$f = a_0 X_1^d + a_1 X_1^{d-1} + \dots + a_d$$

$$g = b_0 X_1^e + a_1 X_1^{e-1} + \dots + b_e$$

$a_i \in K[X_0, X_2]$ homogen v. Grad i und $a_0, b_0 \neq 0$, da sonst $(0:1:0) \in V(f)$ oder $V(g)$ liegt.

Betrachte die Projektion von $p = (0:1:0)$ in $\mathbb{P}^1$, $\quad \mathbb{P}^2 \setminus \{(0:1:0)\}$ $(a:b:c) \mapsto$

In der affinen Karte $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ entspricht dies

$$\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$$
$$(x,y) \longmapsto y$$

Die Resultante $\mathrm{Res}_{X_1}(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_d & & a_0 & b_e & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & & a_d & & & b_e \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{e} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{d}$$

ist homogen vom Grad de in $K[X_0, X_2]$
Das Resultat folgt, wenn wir zeigen können, dass $V(f)$ und $V(g)$ sich nur in Punkten $(a:b:c)$ schneiden, die auf der Geraden $\overline{(0:1:0),\ (a:b:c)} = \{(\lambda a : \mu : \lambda c) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{A}^2\}$ mit $R(a,c) = 0$
Aber dies ist klar. Entlang der Geraden $X_0 = 0$ schneiden sich f, g nicht, also alle Schnittpunkte liegen im affinen $U_0 = \{X_0 = 1\} \cong \mathbb{A}^2$. $R(1, Y) = \mathrm{Res}_X(f(1,X,Y), g(1,X,Y))$
Es bleibt zu zeigen, dass die Multiplizität

$$\mathrm{mult}(R(1,Y), c) = \sum_{p=(1:b:c)\in\mathbb{P}^2} i(f,g;p)$$

erfüllt. $h \longmapsto (h_p)_{p\in V(f,g)}$

06.07.18 Hierzu: $K[X,Y]/(f^a,g^a) \cong \bigoplus_{\substack{p\in V(f,g)\\ = V(f^a,g^a)\\ \subseteq \mathbb{A}^2 \cong U_0\cap\mathbb{P}^2}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(f^a,g^a)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ als $K[X,Y]$-M

Dies gilt, da $(K[X,Y]/(f^a,g^a))_{\mathfrak{m}_p} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(f^a,g^a)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ (*)
für alle $p\in\mathbb{A}^2$ mit $\mathfrak{m}_p = I(p) \subset K[X,Y]$
und (*) ungleich 0 nur für $p \in V(f^a,g^a)$, da für $p\notin V(f^a,g^a)$, f^a oder g^a Einheit ist.
Außerdem

$$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(f^a,g^a)\right)_{\mathfrak{m}_q} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(f^a,g^a)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} & \text{für } q = p \\ 0 & \text{für } q \neq p \end{cases}$$

$K[X,Y] \setminus \mathfrak{m}_p \neq \mathfrak{m}_p \cap K[X,Y] \setminus \mathfrak{m}_q \neq \emptyset$
Nehme $s \in \mathfrak{m}_p \cap K[X,Y] \setminus \mathfrak{m}_q$, $t \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$, so gilt
$s^N t \in (f^a,g^a)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ für ein $N\in\mathbb{N}$
Wir betrachten nun $K[X,Y]/(f^a,g^a)$ als $K[Y]$-Modul
Als solcher hat er eine Präsentation

$$0 \longleftarrow K[X,Y]/(f^a,g^a) \longleftarrow \bigoplus_{i=0}^{d+e-1} K[Y]X^i \xleftarrow{\cdot f^a,\ \cdot g^a\ (**)} \bigoplus_{i=0}^{d-1} K[Y]X^i \oplus \bigoplus_{i=0}^{e-1} K[Y]X^i \longleftarrow 0$$

(**) hat Präsentationsmatrix
$\mathrm{Syl}(1,Y)$

Wir wenden nun den Elementarteilersatz für Hauptideal-Integritätsringe an auf $K[Y]$.

$$\det \mathrm{Syl}(1,Y) = \mathrm{Res}_X(f^a, g^a) = Y^m \cdot h$$

mit $h \in K[Y]$, $h(0) \neq 0$, dann ist $\mathrm{mult}(R(1,Y),0) = m$

Betrachte nun $K[Y]_h$ und wende den Elementarteilersatz an.

$$\left(K[X,Y]/(f^a,g^a)\right)_h \leftarrow K[Y]^{d+e} \xleftarrow{\begin{pmatrix} Y^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & Y^{m_{d+e}} \end{pmatrix}} K[Y]^{d+e} \leftarrow 0$$

als $K[Y]$-Modul. $\cong$

$$\bigoplus_{\substack{p \in V(f,g) \\ = (1:a:0)}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} / (f^a,g^a)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$$

Damit

$$\dim_{K\text{-VR}} \left(K[X,Y]/(f^a,g^a) \right)_h = \sum_{p=(1:a:0)} i(f,g,p)$$

$$= \sum_{j=1}^{d+e} m_j = m \qquad \square$$

<u>Thm.</u>: $C = V(f)$ eine ebene Kurve, $f \in \overline{K}[X_0,X_1,X_2]$ vom Grad d, quadratfrei. Für $p \in \mathbb{P}^2$ bezeichne $r_p = \mathrm{mult}(f,p)$
$= \min\{k \mid m_p^k \ni f\}$

Dann gilt:

(1) C hat höchstens $\binom{d}{2}$ viele singuläre Punkte, genauer

$$\binom{d}{2} \geq \sum_{p \in \mathbb{P}^2} \binom{r_p}{2}$$

(2) Ist f irreduzibel, dann gilt

$$\binom{d-1}{2} \geq \sum_{p \in \mathbb{P}^2} \binom{r_p}{2}$$

<u>Bew</u>: Für $d=1$ ist C eine Gerade und damit glatt.
Sei also $d \geq 2$.
Es seien $p_1, \dots, p_s$ die (endlich vielen!) singulären Punkte von f und $r_1, \dots, r_s$ deren Multiplizitäten

Da f quadratfrei ist können $\partial f / \partial x_i$ nicht identisch verschwinden.

o.E seien die Koordinaten so gewählt, dass $p_1, \ldots, p_s \in U_0$ gilt und $\partial f / \partial x_1 \neq 0$

$$\operatorname{mult}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, p_i\right) \geq \operatorname{mult}(f, p_i) - 1$$

Mit Bézout folgt

$$d(d-1) = \sum_{p \in \mathbb{P}^2} i\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, p\right) \geq \sum_{p \in \mathbb{P}^2} r_p (r_p - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} r_i (r_i - 1)$$

(2) $p_1, \ldots, p_s$ die singulären Punkte $r_1, \ldots, r_s$ die Multiplizitäten

Dann hat die Linearschar $L(d-1; (r_1-1)p_1, \ldots, (r_s-1)p_s)$ Dimension größer $\binom{d+1}{2} - \sum \binom{r_i}{2} \geq d$ nach Teil (1)

Wir wählen $t = \binom{d+1}{2} - \sum \binom{r_i}{2} - 1$ glatte Punkte $q_1, \ldots, q_t$.

$$\dim L(d-1; (r_1-1)p_1, \ldots, (r_s-1)p_s, q_1, \ldots, q_t) > 0$$

Sei $g \in L(-)$, dann gilt nach Bézout

$$d(d-1) = \sum_{p \in V(f,g)} i(f, g, p) \geq \sum_{i=1}^{s} r_i (r_i - 1) + t$$

$$= \sum_{i=1}^{s} r_i (r_i - 1) + \binom{d+1}{2} - \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2} - 1$$

äq zu $\frac{d^2 - 3d}{2} \geq \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2} - 1$

äq zu $\binom{d-1}{2} \geq \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2}$ $\square$

<u>Korollar:</u> Sei $f \in K[X_0, X_1, X_2]$ homogen von Grad d und mit Notation wie oben. Gilt

$$\binom{d-1}{2} = \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2},$$

dann lässt sich $C = V(f)$ rational parametrisieren

<u>Bew</u>: Wählen wir nun $t-1$ Punkte $q_1, \dots, q_{t-1}$,
dann für $L = (d-1;\ (r_1-1)p_1, \dots, (r_s-1)p_s,\ q_1, \dots, q_{t-1}) \ni g_1, g_2$
(wenigstens ein Büschel)

$$\{ \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \bar{K}^2 \}$$

$\mathbb{P}^1 = \{ V(g_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{P}^1 \}$ und

$$d(d-1) = \sum_{p \in \mathbb{P}^2} i(f, g; p)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{2} - (t-1) + \sum_{p_\lambda \neq p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{t-1}} \overbrace{i(f, g_{\lambda}, p_\lambda)}^{1}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\dashrightarrow C = V(f) \\ \lambda &\longmapsto p_\lambda \end{aligned}$$

liefert die rationale Parametrisierung und diese ist birational

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \in K[\lambda_1, \lambda_2][x_0, x_1, x_2]$$

$$\cup$$

$$m_{p_i}^{r_i},\ m_q$$

$$(f, g_\lambda) : \prod m_{p_i}^{r_i} \cdot \prod_{j=1}^{t-1} q_j$$

$\ell_1, \ell_2 \in K[s,t][x_0, x_1, x_2]$, ℓ_i linear in x_0, x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$a \times b(\lambda, t)$ gibt die Koordinaten von p_λ.

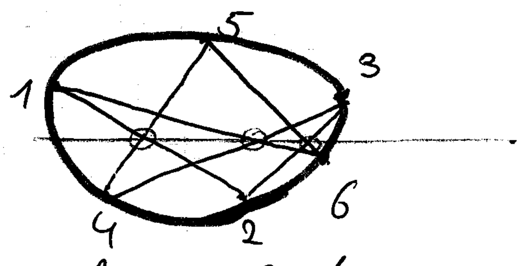
<u>Satz</u> (Pascal) $p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{P}^2$. 6 Punkte, keine 3 auf einer Geraden. Betrachte das 6-Eck

$\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_2 p_3}$, $\overline{p_3 p_4}$, $\overline{p_4 p_5}$, $\overline{p_5 p_6}$, $\overline{p_6 p_1}$

$q_1 = \overline{p_1 p_2} \cap \overline{p_4 p_5}$

$q_2 = \overline{p_2 p_3} \cap \overline{p_5 p_6}$

$q_3 = \overline{p_3 p_4} \cap \overline{p_6 p_1}$



q_1, q_2, q_3 liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $p_1, \dots, p_6$ auf einer Konik liegen

<u>Beweis:</u> Betrachte $E = \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_5P_6}$, $E \cap F = \{P_1, \ldots, P_6, q_1, \ldots\}$

$F = \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overline{P_6P_1}$

Angenommen q_1, q_2, q_3 liegen auf einer Geraden L, Betrachte $q_4 \in L$ und $G_{\lambda,\mu} = \lambda E + \mu F$ mit $q_4 \in G_{\lambda,\mu}$.

$G_{\lambda,\mu} = \ell \cdot q$ mit $P_1, \ldots, P_6 \in V(q)$. Umgekehrt ist $p_1, \ldots, p_6$ in $V(q)$, so ex ℓ mit $G_{\lambda,\mu} = g\ell$

10.07.18 Anwendung von Bézout: <u>Gruppengesetz</u> auf einer Kubik

Sei $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ eine irreduzible Kubik, die eine glatte Kurve E definiert

Sei $p_0 \in E$ ein fester Punkt. Wir definieren eine Addition auf E

$$E \times E \to E, \quad (p,q) \mapsto p+q$$

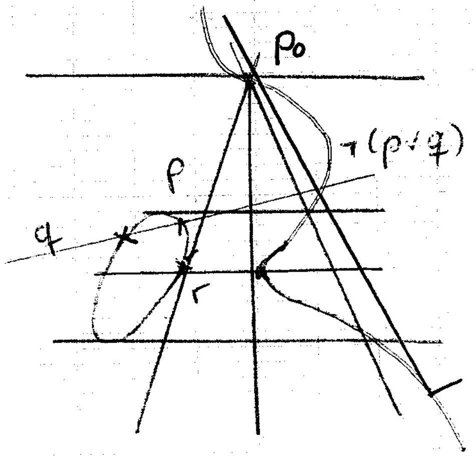
wie folgt. $(p,q) \mapsto$ dritter Schnittpunkt von $\overline{pq} \cap E$ $=: \neg(p \vee q)$

$p+q :=$ dritte Schnittpunkt von der Graden $\overline{\neg(p \vee q), p_0}$ mit E

Im Beispiel ist $f = x_2^2 x_0 - (x_1^3 + a x_1 x_0^2 + b x_0^3)$ die Homogenisierung von einer kubischen Gleichung

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad a, b \in K$$

in Weierstraßscher Normalform und $p_0 = (0:0:1)$



Im Fall $p = q$ ersetze $\overline{pq}$ durch $T_p E$

Das Gruppengesetz ist klarer Weise kommutativ, neutrales Element ist p_0, das Inverse zu p ist $-p = \overline{pp_0} \cap E$.

Nicht so klar ist das Assoziativgesetz

$$(p+q)+r = p+(q+r)$$