$$P_X(t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-d+n}{n}$$
$$= t^n/_{n!} + \frac{(t-d)^n}{n!} + \frac{\sum_{i=0}^{n} i t^{n-1}}{n!} - \text{"} + O(t^{n-2})$$
$$= \frac{n\, d\, t^{n-1}}{n!} + O(t^{n-2}) = d \cdot t^{n-1}/_{n!} + O(t^{n-2})$$

□

und $\deg X = \deg S$

13.07.18

Produkte von algebraischen Mengen

Für $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$, $Y = V(J) \subset \mathbb{A}^m$, $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$, $J = K[Y_1, \dots, Y_m]$ können wir
$$X \times Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+m}$$
durch $(I + J) \subset K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ definieren.

Für projektive algebraische Mengen ist die Definition komplizierter.

Wir wollen $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ also projektive Varietät definieren.

Betrachte die Abbildung
$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{f} \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$
$$((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots b_m)) \longmapsto (a_i b_j),$$
sie ist wohldefiniert.

Wir verwenden homogene Koordinaten $(x_0, \dots, x_n)(y_0, \dots, y_m)$ auf $\mathbb{P}^n$ bzw auf $\mathbb{P}^m$ und $(z_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,m}}$ auf $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$

Wir werden das Bild von $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ mit der proj algebraischen Menge X, die durch die 2×2 Minoren der Matrix
$$Z = (z_{ij})_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n}} \qquad Z^T = \begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0n} \\ z_{10} & & \vdots \\ \vdots & & \\ z_{m0} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix}$$
definiert wird, identifizieren.

$$Z^T = \begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0n} \\ \vdots & & \\ z_{m0} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix}$$

$I = I_{2\times 2}(Z)$, $V(I) \cap U_{00}$ mit $U_{00} = \{ z_{00} = 1 \}$

Für $p \in V(I) \cap U_{00}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & a_1 b_1 & \cdots & a_n b_1 \\ \vdots & \vdots & & \\ b_m & a_1 b_m & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}^T$$

Also $V(I) \cap U_{00} \underset{f}{\cong} \overset{= \mathbb{A}^{n+m}}{U_0 \times U_0} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

und allgemein

$$V(I) \cap U_{ij} = U_i \times U_j = \mathbb{A}^{n+m}$$

Da $\bigcup_{(ij)} U_{ij} = \mathbb{P}^{n \cdot m - n - m}$ ist X eine $(n+m)$-dim Mannigfaltigkeit und f ist eine Bijektion aufs Bild

Wir definieren $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ als algebraische Menge durch

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = V(I).$$

Prop. Das homogene Ideal $I(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset K[z_{ij}]$ ist durch die 2×2-Minoren der Matrix Z erzeugt und die bilden eine GB.

Bsp. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ ist die quadratische Hyperfläche, die durch

$$\det \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \end{pmatrix} = z_{00} z_{11} - z_{10} z_{01}$$

definiert wird.

Bew:
$$\begin{array}{ccccccc} z_{00} & > & z_{01} & > & \cdots & > & z_{0m} \\ \vee & & & & & & \vee \\ z_{10} & > & z_{11} & > & \cdots & & z_{1m} \\ \vee & & \vee & & & & \vee \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vee & & & & & & \vee \\ z_{n0} & > & z_{n1} & > \cdots & & > & z_{nm} \end{array}$$

Wir verfeinern die obige partielle Ordnung zu einer vollständigen Ordnung der Variablen und betrachten deglex auf $K[z_{00}, \dots, z_{nm}]$

in $\det \begin{pmatrix} z_{ij} > z_{\ell j} \\ \vee \quad\quad \vee \\ z_{ik} > z_{\ell k} \end{pmatrix} = - z_{ik} z_{\ell j}$

Betrachte den Ringhom
$$K[z_{ij}] \xrightarrow{\Phi} K[x_0, \dots, x_n, y_0 \dots]$$
$$z_{ij} \longmapsto x_i y_j$$

Offenbar gilt $\ker \Phi = I(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \supset I_{2\times 2}(Z)$

So ergibt $z_{i_1 j_1} \cdots z_{i_k j_k}$ ein Monom in $K[z_{ij}]$

Der Rest nach Division nach den Minoren ist ein Monom

$$z_{i_1' j_1'} \cdots z_{i_k' j_k'}$$

mit $\{ i_1, \dots, i_k \} = \{ i_1' \le \dots \le i_k' \}$

$$\{ j_1, \dots, j_k \} = \{ j_1' \le \dots \le j_k' \}$$

Also $K[z_{ij}] / I_{2\times 2}(Z) \hookrightarrow K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$

indem man

$$z_{i_1 j_1} \cdots z_{i_k j_k} \longmapsto x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_k}$$

mit $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k$ und $j_1 \le \dots \le j_k$

Auf der Menge dieser Monome, links und rechts, ist dies eine Bijektion

Es folgt $\ker \Phi = I_{2\times 2}(Z)$, da die Bildelemente K-linear unabhängig sind.

Ferner sind die Minore eine GB, da wir sonst ein weiteres Polynom p in $K[z_{ij}]$ im Kern finden würden

$$\mathrm{in}(p) \notin \langle \mathrm{in}(\text{Minoren}) \rangle$$

Da das Bild

$$K[z_{ij}] / I_{2\times 2}(Z) \subset K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$$

ein Unterring eines Integritätsrings ist, ist $\ker \Phi = I_{2\times 2}(Z)$ ein Primideal und $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ eine projektive Varietät.

<u>Bem</u>: In etwas abstrakteren Termen

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V), \quad \mathbb{P}^m = \mathbb{P}(W)$$

ist

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V \otimes W) \\ \| \\ \{ [v \otimes w] \mid v \otimes w \in V \otimes W \text{ ein zerlegbarer Tensor} \} \\ v \in V,\ w \in W \end{array}$$

Im allgemeinen

$$V \otimes W \ni t = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$$

Wenn wir diese Darstellung r-minimal gewählt haben, dann ist

$$r = \operatorname{rank} t = \operatorname{rank}(t : V^* \to W)$$

mit $\operatorname{Hom}(V^*, W) \cong V \otimes W$

Die Frage, welchen Rang Tensoren in

$$\mathbb{P}(U \otimes V \otimes W) \supset \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$$

haben ist ein zentrales Thema der Komplexitätstheorie

Für beliebige proj. alg. Mengen $A \subset \mathbb{P}^n$, $B \subset \mathbb{P}^m$ definieren wir $A \times B \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{n \cdot m + n + m}$, wie folgt:

Nehme $I_{2\times 2}(z)$, für jeden homogenen Erzeuger $f \in I_d$, $V(I) = A$ betrachte

$$f(X)\, Y^\alpha = \tilde{f}_\alpha(z_{ij}) \quad |\alpha| = d$$

und analog für $g \in J_e$, $V(J) = B$

$$X^\alpha g(Y), \quad |\alpha| = e$$

$A \times B \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$ wir dann durch alle so erhaltenen Gleichungen definiert

<u>Beispiel</u> $A \subset \mathbb{P}^2$ die Konik $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$
und $A \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^5$

$$I_{2\times 2}\begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \\ z_{20} & z_{21} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} z_{00} z_{20} - z_{10}^2 \\ z_{00} z_{21} - z_{10} z_{11} \\ z_{01} z_{21} - z_{11}^2 \quad \text{u.s.w.} \end{array}$$

Schließlich für quasi projektive Mengen

$$\mathbb{P}^n \supset A = A_1 \setminus A_2, \quad B = B_1 \setminus B_0 \subset \mathbb{P}^m$$

$$A \times B = (A_1 \times B_1) \setminus (A_0 \times B_1 \cup A_1 \times B_0)$$

ebenfalls quasi projektiv

<u>Bem:</u> $A \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ beliebige Teilmenge $I = I(A) \subset K[z_{ij}]$
dann $J = f(I) \subset K[x_0, .., x_n, y_0, .., y_m]$

$$J^{sat} = (J : (x_0 \dots x_n)^\infty) : (y_0 : \dots : y_m)^\infty$$
$$\subset K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$$

Ideal, das weder $(x_0, \dots, x_n)$ noch $(y_0, \dots, y_m)$ als assoziierte Primideal enthält und

$$K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m] / J^{sat}$$

nennt man auch den Bigraduierten Koordinatenring
$$\deg(x_i) = (1,0) \quad , \deg(y_j) = (0,1)$$

Beispiel: Ist $f \in K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ ein Bihomogenes Polynom von Bigrad (d, e). Dann nennt man
$$V(f) = \{(a,b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid f(a,b) = 0\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$$

eine Hyperfläche von Bigrad (d, e)

Rationale Abbildungen und Morphismen

Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine quasi projektive algebraische Varietät. Eine Abb $f : X \to \mathbb{P}^m$ heißt Morphismus, wenn für alle $p \in X$ eine Umgebung $p \in U \subset X$ ex und rationale Funktionen $f_0, \dots, f_m \in K(X)$ mit f_i regulär in allen Punkten $q \in U$ gibt, sodass
$$f_{|U} : U \to \mathbb{P}^m, \quad q \mapsto (f_0(q) : \dots : f_m(q))$$
übereinstimmt.

Beispiel:
Sei $F_0, \dots, F_m \in K[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome gleichen Grades, sodass $X \cap V(F_0, \dots, F_m) = \emptyset$
Dann ist
$$f : X \to \mathbb{P}^m, \quad p \mapsto (F_0(p) : \dots F_m(p))$$
ein Morphismus. Da $X \subset \bigcup D(F_i)$ können wir für $p \in X \cap D(F_i)$ f durch
$$p \mapsto \left(\frac{F_0(p)}{F_i(p)} : \dots : 1 : \dots \frac{F_n(p)}{F_i(p)} \right)$$
darstellen und
$$\frac{F_0}{F_i}\Big|_X = K(X).$$

Allgemein, falls $X \not\subset V(F_0,\dots,F_m)$ definiert

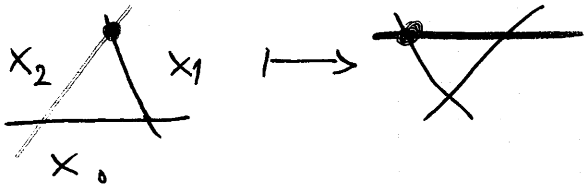
$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^m, \quad p \mapsto (F_0(p) : \dots : F_m(p))$$

eine rationale Abbildung mit Definitionsbereich $X \setminus V(F_0,\dots,F_m)$

<u>Bsp:</u> $q^2 = id = x_0 x_1 x_2 \, (x_0 : x_1 : x_2)$

$$\mathbb{P}^2 \overset{q}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \left(\tfrac{1}{x_0} : \tfrac{1}{x_1} : \tfrac{1}{x_2}\right)$$

$$= (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$$



$\overline{K}(\mathbb{P}^2) = \overline{K}(x,y) \hookleftarrow PGL(3,\overline{K}), \, q$

Max Noether: $Aut(\overline{K}(x,y)/\overline{K})$ wird erzeugt von q und $PGL(3,\overline{K})$

<u>Beispiele</u> Projektive Noethernormalisierung

Sei $S_X = K[x_0,\dots,x_n]/I_X$ der hom. Koordinatenring von einer proj. Varietät X der Dimension d.

Wähle Linearformen $y_0,\dots,y_d \in K[x_0,\dots,x_n]_1$, sodass

$$K[\overline{y}_0,\dots,\overline{y}_d] \hookrightarrow S_X$$

eine Noethernormalisierung ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \setminus \overset{\mathbb{P}^{n-d-1}}{V(y_0,\dots,y_d)} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^d \\ \cup & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

$X \to \mathbb{P}^d$ ist dann eine endliche Abbildung

Beachten Sie für die Krulldimension

$$\dim S_X = d + 1 = \dim C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$
$$= \dim X + 1$$

<u>Beispiel</u> Veronese Einbettung. Betrachte $\mathbb{P}^n$, $d \geq 1$ und alle Monome x^α von Grad d in $K[x_0,\dots,x_n]$

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}^{N_d} \qquad N_d = \binom{n+d}{n} - 1$$
$$p \mapsto (x^\alpha(p))$$

Betrachte das Bild Y_α auf $\mathbb{P}^{N_d}$

$k[(Y_\alpha)] \xrightarrow{\varphi} k[x_0,\dots,x_n]$, $Y_\alpha \mapsto X^\alpha$

Sei $X = \nu_d(\mathbb{P}^n)$, $I(\nu_d(\mathbb{P}^n)) = \operatorname{Ker}\varphi$, $\nu_d(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{P}^n$

$D(Y_{(d,0,\dots,0)}) \subset \mathbb{P}^{N_d}$. $D(Y_{(d,0,\dots,0)}) \cap \nu_d(\mathbb{P}^n) \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$

$$\frac{Y_{(d-1,1,\dots,0)}}{Y_{(d,0,\dots,0)}} = x_1/x_0 \;, \quad \frac{Y_{(d-1,0,\dots,1)}}{Y_{(d,\dots,0)}} = x_n/x_0$$

$(1 : a_1 : \dots : a_n)$ gewinnen wir auf $Y_\alpha(p)/Y_{(d,0\dots0)}(p)$ zurück

$$\begin{array}{c|ccc}
 & x_0^{d-1} & x_0^{d-2}x_1 \;\cdots & x_n^{d-1} \\ \hline
x_0 & x_0^{d} & x_0^{d-1}x_1 & \\
\vdots & x_0^{d-1}x_1 & x_0^{d-2}x_1^2 & \\
 & & & \\
x_n & & &
\end{array} = \begin{pmatrix} Y_{(d,0,\dots,0)} & Y_{(d,1,\dots,0)} \\ & \end{pmatrix} = M(Y)$$

$I_{2\times 2}(M(Y)) = I(\nu_d(Y))$.

$\mathbb{P}^n \rightleftarrows \nu_d(\mathbb{P}^n)$ Dazu betrachten wir die Spalten von $M(Y)$ diese auf $V(I_{2\times 2}\, M(Y))$ eingeschränkt geben eine wohldef Abb

$$\begin{aligned} \nu_d(\mathbb{P}^n) &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ a &\longmapsto \text{Varietät der Zeilen} \end{aligned}$$

<u>Bsp:</u> $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$

$$M(Y) = \begin{pmatrix} Y_{200} & Y_{110} & Y_{101} \\ Y_{110} & Y_{020} & Y_{011} \\ Y_{101} & Y_{011} & Y_{002} \end{pmatrix}$$

$I_{\nu_2}(\mathbb{P}^2) = I_{2\times 2}(M(Y))$

$\nu_2(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$
$(Y_{200} : Y_{020} : Y_{002})$
ist eine Noether normalis.

$$(S_{\nu_d(\mathbb{P}^n)})_e \cong K[x_0,\dots,x_n]_{d\cdot e}$$

$$h_{\nu_d(\mathbb{P}^n)}(e) = \binom{ed+n}{n} = d^n \, e^n/n! + O(e^{n-1})$$

Damit $\deg \nu_d(\mathbb{P}^n) = d^n$ $\square$