16.07.18 Morphismen zw proj. Varietäten sind komplizierter zu beschreiben als zw. affinen Varietäten A, B.
Ein Morphismus $f: A \to B$ zw. aff. Var. korrespondiert zu einem $\overline{K}$-Algebren Hom
$$f^{\#}: \overline{K}[B] \to \overline{K}[A]$$
Allerdings besitzen Morphismen zw. proj. Var bessere Eigenschaften.

Prop:
Sei A eine proj. Varietät und $f: A \to B \subset \mathbb{P}^m$ ein Morphismus mit B quasi-proj. Varietät.
Dann ist $f(A) \subset B$ eine Zariski abgeschlossene Teilmenge

Bem: Für $f: A \to B$ zw aff. Var ist das Bild $f(A) \subset B$ nur konstruktiv, d.h. eine Vereinigung von quasi-aff. Varietäten
Bsp $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x,y) \mapsto (x, x\cdot y)$ hat Bild
$$\mathbb{A}^2 - V(x) \cup \{(0,0)\}$$
$$\overset{\shortparallel}{(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1}$$

Bew: Angenommen $A \subset \mathbb{P}^n$. Wir ersetzen A durch den Graphen von f
$$A \cong \Gamma_f = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} \subset \mathbb{P}^n \times B$$
und f durch die Projektion
$$\pi: \mathbb{P}^n \times B \to B \subset \mathbb{P}^m$$
z.z. $\pi(\Gamma_f)$ ist Zariski abgeschl. in $B \subset \mathbb{P}^m$.
Weil „abgeschl." eine lokale Eigenschaft ist, ersetzen wir $B \subset \mathbb{P}^m$ durch offene Karte $U_i \subset \mathbb{P}^m$ und nehmen $U_i \cong \mathbb{A}^m$ an.
Die Prop. folgt aus
Thm: (Fundamentalsatz der Eliminationstheorie)
Sei $A \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ eine Zariski-abg Teilmenge

$\pi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ die Projektion auf die zweite Komponente.
Dann ist $\pi(A) \subset \mathbb{A}^m$ Zariski abgeschlossen.

__Bew__: Sei $I(A) \subset K[X_0,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_m]$ das Ideal von $A \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$. $I(A)$ wird erzeugt von Polynomen, welche homogen in $X_0,\dots,X_n$ sind mit Koeff in $K[Y_1,\dots,Y_m]$
Sei

$$I(A) = (f_1,\dots,f_k) \subset K[Y_1,\dots,Y_m][X_0,\dots,X_n]$$

Sei $p = (a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{A}^m$ ein Punkt. Es gilt $p \in \pi(A)$ gdw. $(f_i(a_1,\dots,a_m, x_0,\dots,x_n) \mid i=1,\dots,k)$ keine Potenz von $(X_0,\dots,X_n)$ enthält.
Dies ist eine determinantielle Bed in Koeff der f_i.
Seien die f_i homogen von Grad d_i. Dann erhalten wir $\binom{N-d_i+n}{n}$ Polynome durch Multiplikation von f_i und einer Basis der Monome von Grad $N-d_i$ in $(X_0,\dots,X_n)$
Koeffvergleich ergibt eine

$$\binom{N+n}{n} \times \sum_{i=1}^{k} \binom{N-d_i+n}{n}$$ Matrix f_N von Koeff in $K[Y_1,\dots,Y_m]$

Bsp für Koeff von f_n: $\left(\frac{\partial f_1 x_0^{N-d_1}}{\partial x_0^N} ; \text{ Koeff von } f_1 x_0^{N-d_1} \text{ vor } X_0^N \right)$

Dann gilt $p \notin \pi(A)$, falls die Matrix ausgewertet in p Rang $\binom{N+n}{n} = r$ hat, d.h. $p \notin V(I_{r\times r}(f_N))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}^{\shortparallel} I_r$
Das ergibt eine Kette

$$I_1 \subset I_2 \dots I_N \subset \dots$$

$p \in \pi(A)$ gdw $p \in \bigcap_{N=1}^{\infty} V(I_N) = V\left(\sum_{N=1}^{\infty} I_N\right)$
Da das Ideal $J = \sum_{N=1}^{\infty} I_N \subset K[Y_1,\dots,Y_m]$ endl. erzeugt ist, ist

$$\pi(A) = V(J)$$

abgeschlossen.

__Kor__: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine proj. Varietät und $f \in K(X)$ eine rat. Funktion, welche überall regulär ist. Dann ist f konstant.

Bew: f definiert einen Morphismus

$$f: X \to \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$$

Nach dem vorherigen Thm ist $f(X) \subset \mathbb{P}^1$ abg.
Da $f(X) \subset \mathbb{A}^1 \subsetneq \mathbb{P}^1$ ist, ist die Abb nicht surjektiv, folglich besteht $f(X) \subset \mathbb{A}^1$ aus endl. vielen Punkten. Da X irred. ist, ist das Bild irred, also ein Punkt.

Bem: Die Folgerung ist ähnlich zu einem Ergebnis in der Funktionentheorie.
Eine hol Fkt f auf einer zshgd. kompl. kompakten Mannigfaltigkeit M ist konstant (Maximumsprinzip)

Thm (Bézout, zweite Version)
Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine proj. alg. Teilmenge der Dimension r. Sei $H = V(h) \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, welche keine Komp. von X enthält
Dann ist

$$\deg X \deg H = \sum_{\substack{Z \subset X \cap H \\ \text{Komp von} \\ \dim Z = r-1}} i(X, H; Z) \deg Z$$

Wobei die Schnittmultiplizität wie folgt def. ist
Bsp: Betrachte die kubische Fläche def. durch

$$f = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_0 \end{pmatrix} = 2x_1x_2x_3 - x_2^3 - x_0x_3^2$$

und die Quadrik $q = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$
$X = V(f)$ und $H = V(q)$ schneiden sich in der Kurve C

$$I_{2\times 2}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$ welche das Bild von

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^3, \ (s:t) \longmapsto (s^3 : s^2t : st^2 : t^3)$$

ist
Der Schnitt ist nicht transversal:
$i(X, H; C) = 2$, was bedeutet, dass sich X und H tangential entlang von C schneiden

Für $p = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$ sind

$\operatorname{grad} f(p) = (-t^6, 2st^5, -s^2t^4, 0) = -t^4(t^2, -2st, s^2$

$\operatorname{grad} g(p) = (st^2, -2s^2t, s^3, 0) = s(t^2, -2st, s^2, 0$

proportional

$$\underset{\overset{\|}{3}}{\deg X} \quad \underset{\overset{\|}{2}}{\deg H} = \underset{\overset{\|}{2}}{i(X, H, C)} \cdot \underset{\overset{\|}{3}}{\deg C}$$

Um die Schnittmult zu def. beweisen wir das folgende T

Thm. Sei M ein endl. erzeugter graduierter S-Modul ($S = K[x_0, \dots, x_n]$). Es ex eine endl. Filtrierung

$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_e = M$ von M durch Unter-moduln, dass jeder Quotient $M_i/M_{i-1} \cong S/\mathfrak{P}_i(-e_i)$

Bew Erinnerung: $\operatorname{Ass}(M)$ besteht aus maximalen Elem bzgl. der Inklusion in der Menge $\{\operatorname{Ann}(m) \mid m \in M - \{0\}\}$

Im Falle von M eines grad. Moduls kann man $m \in M$, welches zu einem assoz. Primideal führt, homogen wähle etwa vom Grad e.

Dann ist
$$S/\mathfrak{P}(-e) \hookrightarrow M$$
$$1 \longmapsto m$$

eine Inklusion mit $\mathfrak{P} = \operatorname{Ann}(m)$. Nun wenden wir Noe sche Induktion an:

Falls $M \neq 0$, dann $\operatorname{Ass}(M) \neq 0$ und die Menge von ho Untermoduln $\{N \subset M \mid N$ besitzt eine Filtrierung wie in Thm$\}$

ist nicht leer.

Da M noethersch ist, besitzt diese Menge ein maximales Element N'. Es gilt $M = N'$. Andernfalls betrachten w ein ass Primideal von M/N' und wir können die Filtrierung um einen Schritt erweitern:

$$M_{e+1} \cong \pi^{-1}(S/\mathfrak{P}(-e)), \text{ wobei } S/\mathfrak{P}(-e) \hookrightarrow M/N'$$

und $\pi: M \to M/N'$ Proj

Def: Notation wie in Thm (Bézout)
Sei $M = S/(I_X + (h))$ und $\mathfrak{P} = I(Z)$

Wir def.

$i(H, X; Z)$ als die Anzahl wie oft $\mathfrak{P}$ als Quotient $S/\mathfrak{P}(-e)$ in der Filtrierung von $S/(I_X + (h))$ auftaucht

Dies ist wohldef.
Zum Beweis: Wir berechnen die Hilbertpolynome von $M = S/(I_X + (h))$ auf zwei verschiedene Weisen.

Da h auf keinen Komp von X verschwindet ist

$$0 \leftarrow \underset{= M}{S/(I_X + (h))} \leftarrow S_X \xleftarrow{h} S_X(-\deg h) \leftarrow 0$$

exakt
Der Leitterm des Hilbertpolynoms von $S/I_X + (h)$ ist somit

$$\deg X \deg H \quad t^{r-1}/(r-1)! \; \left(= \deg X \, t^r/r! - \deg X \, \frac{(t - \deg h)}{r!} \right.$$

Andererseits können wir die Filtrierung verwenden und bekommen

$$p_M(t) = \sum_j p_{S/\mathfrak{P}_j}(t - g) = \sum_{\dim V(\mathfrak{P}_j) = r-1} \deg V(\mathfrak{P}_j) \, \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} +$$

$$= \sum_{j=1}^{s} i(X, H, Z) \cdot \deg Z \cdot \frac{t^r}{(r-1)!} + \dots \qquad \square$$

Bem: Man kann sich fragen, warum wir kein allg. Resultat beweisen. $X, Y \subset \mathbb{P}^m$ dim r bzw s welche sich in Dim $r+s-m$ schneiden

Ist $$\deg X \cdot \deg Y = \sum_{\substack{Z \subset X, Y \\ \text{irred} \\ \dim Z = r+s-m}} i(X, Y, Z) \deg Z \;?$$

für $i(X, Y, Z)$ Anzahl von $\mathfrak{P} = I(Z)$ in der Filtrierung $S/I_X + I_Y$

Bsp. Bslr $X = V(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4) \subset \mathbb{P}^4$

$$= \underset{V(x_1,x_2)}{\mathbb{P}^2} \cup \underset{V(x_3,x_4)}{\mathbb{P}^2}$$

Sei $Y = V(x_1+x_2, x_2+x_4)$ eine weitere Ebene durch $p = (1:0:\dots:0) = X \cap Y$.

$$S/_{I_X + I_Y} \cong K[x_0, x_1, x_2]/_{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)}$$

und $(x_1, x_2) = I_p$ taucht 3-mal in der Filtrierung auf und $3 \neq 2 \cdot 1$.

17.07.18 Thm (Dimension von Schnitten)

Seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ zwei Untervarietäten.

Dann hat jede Komp. Z von $X \cap Y$ die Dimension

$$\dim Z \geq \dim X + \dim Y - n$$

Falls die rechte Seite nicht negativ ist, dann ist der Schnitt nicht leer.

Bew: Betrachte den Join / Verbund $J(X,Y) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ def. durch

$$I(X) + I(Y) \subset K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$$

$J(X,Y)$ besteht aus den Geraden $\overline{pq}$, welche einen Punkt

$$p \in X \subset \mathbb{P}^n = V(y_0, \dots, y_n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$$

mit einem Punkt

$$q \in Y \subset \mathbb{P}^n = V(x_0, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$$

verbindet.

Eine GB von $J(X,Y)$ ist eine GB von $I(X)$ vereinigt mit einer GB von $I(Y)$. Insbesondere gilt: $\dim X + \dim Y + 1 = \dim J(X,$

Anmerkung: $X \cap Y \cong J(X,Y) \cap \Delta$, wobei $\Delta = V(x_0 - y_0, \dots, x_n - y$
$\cong \mathbb{P}^n$

Es gilt (ohne Beweis)

Thm (Krulls Hauptidealsatz)

Sei R ein Noetherscher Ring, $g_1, \dots, g_c \in R$.

Dann hat jede Komp von

$$\operatorname{Spec}(R/(g_1, \dots, g_c)) \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$$

Kodimension $\leq c$