<u>Bsp.</u> Bemerkung $X = V(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4) \subset \mathbb{P}^4$

$$= \underset{\substack{\parallel \\ V(x_1,x_2)}}{\mathbb{P}^2} \cup \underset{\substack{\parallel \\ V(x_3,x_4)}}{\mathbb{P}^2}$$

Sei $Y = V(x_1 + x_2, x_2 + x_4)$ eine weitere Ebene durch $p = (1:0:\dots:0) = X \cap Y$.

$$S/_{I_X + I_Y} \cong K[x_0, x_1, x_2]/_{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)}$$

und $(x_1, x_2) = I_p$ taucht 3-mal in der Filtrierung auf und $3 \neq 2 \cdot 1$.

17.07.18 <u>Thm</u> (Dimension von Schnitten)

Seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ zwei Untervarietäten.

Dann hat jede Komp. $Z$ von $X \cap Y$ die Dimension

$$\dim Z \geq \dim X + \dim Y - n$$

Falls die rechte Seite nicht negativ ist, dann ist der Schnitt nicht leer.

<u>Bew.</u>: Betrachte den Join / Verbund $J(X, Y) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ def. durch

$$I(X) + I(Y) \subset K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$$

$J(X, Y)$ besteht aus den Geraden $\overline{pq}$, welche einen Punkt

$$p \in X \subset \mathbb{P}^n = V(y_0, \dots, y_n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$$

mit einem Punkt

$$q \in Y \subset \mathbb{P}^n = V(x_0, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$$

verbindet.

Eine GB von $J(X, Y)$ ist eine GB von $I(X)$ vereinigt mit einer GB von $I(Y)$. Insbesondere gilt: $\dim X + \dim Y + 1 = \dim J(X$

Anmerkung: $X \cap Y \cong J(X, Y) \cap \Delta$, wobei $\Delta = V(x_0 - y_0, \dots, x_n -$
$\cong \mathbb{P}^n$

Es gilt (ohne Beweis)

<u>Thm</u> (Krulls Hauptidealsatz)

Sei $R$ ein Noetherscher Ring, $g_1, \dots, g_c \in R$.

Dann hat jede Komp von

$$\operatorname{Spec}(R/(g_1, \dots, g_c)) \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$$

Kodimension $\leq c$

In anderen Worten: Mit einer Gleichung kann man keine Teilmenge der Kodimension $\geq 2$ definieren.
Eine algebraische Formulierung:
Thm: (Krull, Eisenbud, GTM 150, Thm 10.2)
Falls $\mathfrak{P} \supset (g_1, \ldots, g_c)$ ein minimales Primideal von $(g_1, \ldots, g_c)$ ist, dann hat jede Kette von Primidealen

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_\ell = \mathfrak{P} \subset R$$

die mit $\mathfrak{P}$ endet (und mit dem minimalen Primideal $\mathfrak{P}_0$ von $(0) \subset R$ startet), die Länge $\ell \leq c$.
Dies unterscheidet sich von der Kodimension von Nullstellenmengen über einem nicht alg. abgeschl. Körper.
Bsp: Über $\mathbb{R}$ hat $X = V(X^2 + Y^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$$X(\mathbb{R}) = \{0\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$$

die Kodimension 2.
Andererseits hat die Primidealkette

$$(0) \subsetneq (X^2 + Y^2) \subsetneq (X, Y) \qquad (\text{in } \mathbb{R}[X, Y])$$

Länge $2 = \dim \mathbb{R}[X, Y]$. Somit können wir kein weiteres Primideal zwischen $(0) \subsetneq (X^2 + Y^2)$ einfügen.
Um den Satz zu beweisen, betrachten wir

$$C(I(X) + I(Y)) \subset \mathbb{A}^{2n+2}$$

Jede Komp. $Z \subset X \cap Y = J(X, Y) \cap \Delta$ hat Kodimension kleiner gleich $n+1$ in $J(X, Y)$. Damit

$$\dim C(Z) \geq \underbrace{\dim X + \dim Y + 2}_{\dim J(X, Y) + 1} - n - 1$$

$$\geq \dim X + \dim Y - n + 1$$

Also $\dim Z \geq \dim X + \dim Y - n$
Da $C(I(X) + I(Y)) + (X_0 - Y_0, \ldots, X_n - Y_n)$ den Ursprung enthält, hat der Kegel ~~stribt~~ pos. Dim. im Fall $\dim X + \dim Y \geq n$
Insgesamt $X \cap Y \neq \emptyset$

$\square$

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten
Für $q \in Y$ nennen wir $X_q := f^{-1}(q)$ die <u>Faser von $f$ über</u> $q$.
$f: X \to Y$ nennen wir einen <u>proj Morphismus</u>, falls die Abb faktorisiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n \times Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

sodass $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ eine abgeschl. Teilmenge ist

<u>Bsp.</u> Wenn $X$ proj ist, etwa $X \subset \mathbb{P}^n$, dann gilt
$$X \cong \Gamma_f \subset \mathbb{P}^n \times Y.$$

<u>Thm:</u> (über die Faserdimension)
Sei $f: X \to Y$ eine proj. Morphismus
(1) Die Funktion $q \mapsto \dim X_q$
ist oberhalbstetig in $Y$ (d.h. $\{q \mid \dim X_q \geq r\}$ abg in $Y$ für alle $r \in \mathbb{Z}$)

(2) Wenn $f$ eine surj. Abb zw Varietäten ist, dann ex eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset Y$, sodass
$$\dim X_q = \dim X - \dim Y \quad \text{für alle } q \in U.$$
Insbesondere gilt für einen surjektiven proj Morph
$$\dim X_q \geq \dim X - \dim Y \quad \text{für alle } q \in Y.$$

<u>Bew:</u> (1) Wir dürfen annehmen, dass $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ abg ist.
Sei $q \in Y$ und $\dim X_q = r$. Wir wählen einen lin. Unterraum $\mathbb{P}^{n-r-1} \subset \mathbb{P}^n$, sodass
$$\mathbb{P}^{n-r-1} \cap X = \emptyset$$

(z.B das Zentrum der Proj
$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{P}^r \\ X_q \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
welches eine lineare Noether-Normalisierung von $X_q$ induziert)

Dann ist

$$A = (\mathbb{P}^{n-r-1} \times Y) \cap X \subset \mathbb{P}^n \times Y$$

eine Zariski abg. Teilmenge und $q \notin pr_2(A)$

Da $A$ abg ist, ist $pr_2(A) \subset Y$ Zariski abgeschl.

Der Dimensionssatz gibt, dass $pr_2(A) \subset Y$ enthält alle Punkte $q'$, die Faserdim $> r$ haben und vielleicht noch weitere Punkte.

Für $q' \in pr_2(A)$: $\mathbb{P}^{n-r-1} \times \{q'\} \cong \mathbb{P}^{n-r-1} \subset \mathbb{P}^n$

Aus $X_{q'} \cap \mathbb{P}^{n-r-1} \neq \emptyset$ folgt

$$\dim X_{q'} + \dim \mathbb{P}^{n-r-1} - n \geq 0$$

$$\rightsquigarrow \dim X_{q'} \geq r+1$$

Also $U = Y - pr_2(A)$ ist offen mit $\dim X_{q'} \leq \dim X_q = r$ für alle $q \in U$.

(2) Wir dürfen annehmen, dass $Y$ offen ist und $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ abgeschlossen. Wir betrachten die Körpererweiterung $\overline{K}(Y) \subset \overline{K}(X)$. Turmsatz gibt

$$\mathrm{trdeg}_{\overline{K}(Y)} \overline{K}(X) = \mathrm{trdeg}_{\overline{K}} \overline{K}(X) - \mathrm{trdeg}_{\overline{K}} \overline{K}(Y)$$

Wir berechnen eine GB von $I$ in $\overline{K}(Y)[x_0, \dots, x_n]$, wobei $I$ das Ideal von $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ ist.

Die resultierende GB korrespondiert zu einer Varietät der Dimension $\mathrm{trdeg}_{\overline{K}(Y)} \overline{K}(X)$.

In solch einer Berechnung müssen wir endl. viele Leitkoeff in $K[Y]$ invertieren

Sei $g$ das Produkt aller dieser Leitkoeff und $U = Y - V(g)$

Dann gilt: Für alle $q \in U$ erhalten wir eine GB von

$$I_q = (g(q, x) \mid g \in F),$$

welches $X_q$ definiert durch Ersetzen von $Y = q$ in eine GB von $I \subset K(Y)[x_0, \dots, x_n]$

Somit

$$\dim X_q = \mathrm{trdeg}_{\overline{K}(Y)} \overline{K}(X)$$

$$= \dim X - \dim Y \quad \forall q \in U$$

Wir haben mehr bewiesen
Die Hilbertfunktion von $X_q \subset \mathbb{P}^n$ ist die gleiche für alle $q \in U$. Die letzte Aussage folgt aus (1) und (2) $\square$

Bem: Ein ähnliches Resultat gilt für die Reduktion modulo einer Primzahl.

Thm: Sei $I = (g_1, \dots, g_r) \subset \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]$ ein hom Ideal erz von homogenen Polynomen $g_i \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ mit ganzzahligen Koeff. Sei

$$I_p = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r) \in \mathbb{F}_p[x_0, \dots, x_n]$$

das Ideal, welches durch Reduktion mod $p$ der Koeff der $g_i$ entsteht.
Dann gilt für alle bis auf endl. viele Primzahlen $p \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

$$\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]/I \quad \& \quad \mathbb{F}_p[x_0, \dots, x_n]/I_p$$

haben die gleiche Hilbertfunktion
Bew: In der GB-Berechnung müssen wir endl. viele Leitkoeff invertieren. Falls $p$ keinen dieser Koeff teilt, gilt in $(I_p)$ und in $(I)$ sind erzeugt von den gleichen Monomen

Thm (Bertini)
Sei $X \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ eine glatte proj. Varietät der Dim $r$
Dann existiert eine nicht leere offene Menge $U \subset \mathbb{P}^{\vee n} := \mathbb{P}(V^*)$ im proj. Raum der Hyperebenen, sodass

$$X \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

glatt ist für alle $H \in U$.
Bew: Wir dürfen annehmen, dass $X \subset \mathbb{P}^n$ nicht ausgeartet ist d.h. $X$ spannt den $\mathbb{P}^n$ auf, sodass $\dim X \cap H = r-1$ für alle $H \in \mathbb{P}^{\vee n}$
Dann ist $X \cap H$ singulär in $p \in X$ gdw $H \supset T_p X$
Wir betrachten das Diagramm

$$N = \{ (p, H) \in X \times \check{\mathbb{P}}^n \mid T_p X \subset H \} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^n$$
$$\downarrow$$
$$X$$

Die Faser von $N \to X$ sind $(n-r-1)$-dim lineare UR

Aus dem Dim thm folgt

$$\dim N = \dim X + n-r-1 = n-1$$

Also ist $pr_2(N) \subset \check{\mathbb{P}}^n$ höchstens eine Hyperfläche und $\mathcal{U} = \check{\mathbb{P}}^n - pr_2(N)$ hat die gewünschte Eigenschaften

<u>Bem</u>: $pr_2(N) =: \check{X}$ bezeichnet die <u>dualen</u> Varietäten von $X$

<u>Bem</u> Falls $X \subset \mathbb{P}^n$ eine nicht notwendigerweise glatte Varietät ist, dann ersetzen wir $N$ durch den Abschluss von

$$\tilde{N} = \{ (p, H) \mid p \in X - \operatorname{Sing} X \,;\, H \supset T_p X \} \subset X \times \check{\mathbb{P}}^n$$

und erhalten $\mathcal{U} \subset \check{\mathbb{P}}^n$, sodass $\operatorname{Sing}(X \cap H) \subset \operatorname{Sing} X \cap H$ für alle $H \in \mathcal{U}$.

Bertini's thm zusammen mit Bézout thm gibt

<u>Kor</u>: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Varietät der Dim. $r$ und $\mathbb{P}^{n-r} \subset \mathbb{P}^n$ ein allg. $(n-r)$-dim linearer UR.

Dann besteht $\mathbb{P}^{n-r} \cap X$ aus $\deg X$ vielen versch. Punkten. $\square$

Der letzte Satz der Vorlesung ist eine dynamische Interpretation der Schnittmultiplizität

20.07.18 <u>Thm</u>: Seien $C, D \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ zwei Kurven definiert durch quadratfreie Polynome

$$f = \sum f_\alpha X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} \quad , \quad g = \sum g_\alpha X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}$$

vom Grad $e$ bzw. $d$ ohne einen gemeinsamen Faktor

Dann ex für alle $1 \gg \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $\tilde{g} = \sum \tilde{g}_\alpha X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} \in \mathbb{C}[X, Y]_{\leq d}$ vom Grad $d$

$$\| \tilde{g} - g \|_2 = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq d} | \tilde{g}_\alpha - g_\alpha |^2} < \delta$$

außerhalb einer Teilmenge von Lebesguemaß Null der Schnitt $V(f,\tilde{g}) \cap U_\varepsilon(p) \subset \mathbb{C}^2$ aus genau $i(f,g,p)$ verschiedene Punkte besteht.

<u>Beweis</u>: Wir betrachten den proj. Abschluss

$$\overline{C},\ \overline{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

und die Veronese Abb $\nu_d : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_d}$ mit $N_d = \binom{d+2}{2} - 1$

Polynome von Grad kleiner gleich $d$ sind in Bijektion mit linearen Polynomen in $\underbrace{\mathbb{C}[Z_\alpha \mid |\alpha| = d]}_{\text{Koordinatenerweiterung von } \mathbb{P}^{N_d}}$

Sei $h$ das lineare Polynom, welches zu $g$ korrespondiert und $h_\infty$ ein allgemeines lin. Poly, sodass $H_\infty = V(h_\infty)$ das Bild $\nu_d(\overline{C}) =: \tilde{C}$ in $d \cdot c$ versch. Punkten schneiden ($\deg \tilde{C} = c \cdot d$). Wie in Beweis von Bertini, sei

$$H_\infty \in U = \check{\mathbb{P}}^{N_d} - (\nu_d(\check{C}))$$

Wir betrachten die Funktion

$$\frac{h}{h_\infty}\Big|_{\tilde{C} - (\tilde{C} \cap H_\infty)} : \tilde{C} - (\tilde{C} \cap H_\infty) \to \mathbb{C}$$

Seien $p_1, \dots, p_s \in \overline{C} \cap \overline{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ die Schnittpunkte. Wähle $\varepsilon > 0$ klein genug, sodass keiner der (Urbilder der) Schnittpunkte von $\tilde{C} \cap H_\infty$ in der Vereinigung $\bigcup U_\varepsilon(p_i) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ liegt und Vereinigung disjunkt ist. (Wir verwenden $\varepsilon$ Umgebg in geeigneten Karten von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Es sei

$$C' = \overline{C} - \bigcup_{i=1}^{s} U_\varepsilon(p_i)$$

und sei

$$M = \min \left| \frac{h}{h_\infty}\Big|_{C'} \right|$$

Dann ex ein $\delta > 0$, sodass

$$\min \left| \frac{\tilde{h}}{h_\infty}\Big|_{C'} \right| \geq M/2$$

für alle $\tilde{h}$ mit $\|\tilde{h} - h\|_2 < \delta$ und $\tilde{C} \cap \tilde{H} \cap H_\infty = \emptyset$.
Dann gilt für solche $\tilde{h}$ mit $\tilde{H} = V(\tilde{h}) \notin \check{\tilde{C}} = \nu_d(\overline{C})$, dass wir $d \cdot c$ verschiedene Schnittpunkte in $\tilde{C} \cap \tilde{H}$ haben, wobei jeder von denen in einer der Mengen

$$U_\varepsilon(p_i) \cap \overline{C} \subset U_\varepsilon(p_i)$$

liegt.

[ A: $\exists\, q_j \in \hat{C} \cap \tilde{H}$ mit $q_j \in C' = \bar{C} - \bigcup_{i=1}^{s} U_\varepsilon(p_i)$
$\Rightarrow \tilde{h}/h_\infty (q_j) = 0 < \eta/2 \leq \min | h/h_\infty|_{C'}|$ ↯ ]

Da es insgesamt

$$c \cdot d = \sum_{i=1}^{s} i(\bar{C}, \bar{D}, p_i)$$

Schnittpunkte gibt, liegen genau $i(\bar{C}, \bar{D}, p_i)$ der Punkte von $\tilde{C} \cap \hat{H}$ in $U_\varepsilon(p_i)$ mit dem Halbstetigkeitsargument

Übungsaufg: (Version von Satz von Bouché)
Sei $\mathcal{O}(U_\varepsilon(p_i))$ die Menge der hol Fkt auf $U_\varepsilon(p_i)$
Dann ist

$$\dim_{\mathbb{C}\text{-VR}} \quad \mathcal{O}(U_\varepsilon(p_i)) / (g, \tilde{g})\, \mathcal{O}(U_\varepsilon(p_i)) \quad \left( = \begin{array}{c} \#\text{ Schnittpunkte} \\ \text{von } g \text{ \& } \tilde{g} \text{ in} \\ U_\varepsilon(p_i) \end{array} \right)$$

(unter-) halbstetig, als eine Funktion von $\tilde{g} \in B_\delta(g) \subset \mathbb{C}[X, Y]$
$\dim B_\delta(g) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\varepsilon \dim \leq r$ $\delta$ abg $\square$

Somit können die Schnittpunkte nicht von $U_\varepsilon(p_i)$ in ein anderes $U_\varepsilon(p_j)$ springen, da die gesamte Anzahl der Schnittpunkte konstant ist. Wir sehen, dass für
$\tilde{g} \to g$ die Schnittpunkte $\bar{C} \cap V(\tilde{g})$ in $U_\varepsilon(p_i)$ gegen $p_i$ konvergieren $\square$