many c_λ are zero because f is a polynomial
$f(a) = 0$ is eq to $c_0 = 0$
Hence $f \in (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

(6) $\bar{A} := V(I(A)) \supset A$ is clear.
In case A is algebraic say $A = V(f_1, \dots, f_r)$ for $f_1, \dots, f_r \in \bar{K}[x_1, \dots, x_n]$ and $a \notin A$ then there is f_j with $f_j(a) \neq 0$. Since $f_1, \dots, f_r \in I(A)$ this implies $a \notin V(I(A))$ so $\bar{A} = A$ in this case.
A arbitrary and $B \supset A$ algebraic set, then
$I(B) \supset I(A)$
Hence $B = V(I(B)) \supset V(I(A)) \supset A$, so $V(I(A))$ is the smallest Zariski closed subset containing A.

<u>Remark</u>: If we consider instead of the Zariski topology the K-Zariski topology weird things happen:

Example: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. $\pi \in \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
$I_{\mathbb{Q}}(\{\pi\}) = \{ f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\pi) = 0\} = (0)$
because π is transcendent

<u>Exercise</u>** Compute the $\mathbb{Q}$-Zariski closure of $\{(\pi, e)\}$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ and get famous.

Schanuel's conjecture (1960) $\Rightarrow$ $\overline{(\pi, e)}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$
i.e. π and e are algebraically independent over $\mathbb{Q}$.

<u>1.5 Def./Prop.</u> $I \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring mit 1. Dann heißt

$$\mathrm{rad}(I) = \{ f \in R \mid \exists\, n > 0 : f^n \in I \} \subset R$$

das Radikalideal von I. I nennt man Radikalideal, wenn $I = \mathrm{rad}(I)$.

<u>Bew</u>: zz $\mathrm{rad}(I)$ ist Ideal. $f, g \in \mathrm{rad}(I)$, es ex. n, m mit $f^n, g^m \in I$.
$(f + g)^{n+m-1} \in I$ und $f + g \in \mathrm{rad}(I)$

<u>Beispiele</u>: (1) Primideale sind Radikalideale
$f^n \in p$, dann $f \in p$ oder $f^{n-1} \in p$ und Ind.

(2) Verschwindungsideale $I(A) \in \bar{K}[x_1, .., x_n]$ sind Radikalideale
$f \in \mathrm{rad}\, I(A)$, dann ex n mit $f^n \in I(A)$ äq zu
$f^n(a) = 0$ für alle $a \in A$.
$f(a) \in \bar{K}$ liegt in einem Körper also $f(a) = 0$ $\forall a \in A$
Damit $f \in I(A)$

<u>Übungsaufgabe 3</u>: Finden sie alg Mengen $A, B \subset \mathbb{A}^2$, sodass
$$I(A) + I(B) \subsetneq I(A \cap B)$$

<u>Beispiel</u> Sei $f \in K[x_1, .., x_n]$ ein nicht konstantes Polynom
Da $K[x_1, .., x_n]$ faktoriell ist, ist
$$f = u \cdot f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$$
u eine Einheit, f_i, f_j irreduzibel und paarweise nicht assoziiert.
Dann gilt: $\mathrm{rad}(f) = (f_1 \cdots f_r)$
<u>Bew</u>: $g^n \in (f) = (f_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{e_r})$
Also $f_i \mid g^n$ und da f_i prim gilt $f_i \mid g$
Damit $f_1 \cdots f_r \mid g$, da $K[x_1, .., x_n]$ faktoriell ist $g \in (f_1 \cdots f_r)$

<u>Übung 4</u>: Zeigen Sie $K[w, x, y, z]/(wx - yz)$ ist nicht faktoriell.

<u>1.6 Theorem</u> (Hilbertscher Nullstellensatz)
$K = \bar{K}$, $J \in \bar{K}[x_1, .., x_n]$ Ideal. Dann gilt
$$I(V(J)) = \mathrm{rad}\, J.$$

<u>1.7 Theorem</u> (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz)
$K = \bar{K}$, $J \subset \bar{K}[x_1, .., x_n]$ ein Ideal. Dann gilt
$$V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$$

1.8 Der Beweis der Implikation: schwacher Nullstellensatz impliziert Nullstellensatz.

Zeigen wir mit dem Trick von Rabinovich

Sei $J = (f_1, \dots, f_r)$ und $f \in I(V(J))$. Dann ist $f^n \in J$ für $n \gg 0$ zu zeigen.

Wir betrachten eine zusätzliche Variable und das Ideal

$\tilde{J} = (f_1, \dots, f_r, Yf - 1) \in \bar{K}[X_1 \dots, X_n, Y]$.

$V(\tilde{J}) = \emptyset$. Wäre $(a_1, \dots, a_n, b) \in V(\tilde{J}) \subset A^{n+1}$, so wäre

$f_1(a) = 0, \dots, f_r(a) \underset{(a,b)}{=} 0$, also $a \in V(J)$ und $f(a) = 0$, da $f \in I(V(J))$. Damit $V(\tilde{J}) \subset V(J) \times A^1 \subset A^{n+1}$

Daraus folgt $(fY - 1)(a, b) = -1 \neq 0$.

Nach 1.7 folgt $1 \in \tilde{J}$.

Wir können also 1 schreiben als

$$1 = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r + g(Yf - 1)$$

mit $g_1, \dots, g_r, g \in \bar{K}[X_1, \dots, X_n, Y]$. Sei Y^N die höchste Potenz mit der Y in $g_1, \dots, g_r$ auftaucht.

Damit
$$f^N = (f^N g_1) f_1 + \dots + (f^N g_r) f_r + f^N g (fY - 1)$$
$$\equiv \tilde{g}_1 f_1 + \dots + \tilde{g}_r f_r \mod (fY - 1)$$

mit $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r$ in dem Unterring $k[X_1, \dots, X_n]$

Damit $f^N - (\tilde{g}_1 f_1 + \dots + \tilde{g}_r f_r) \in (fY - 1)$
$$\in K[X_1, \dots, X_n]$$

Also $f^N = \tilde{g}_1 f_1 + \dots + \tilde{g}_r f_r \in J$.

1.9 Wir werden den schwachen Nullstellensatz mit Induktion nach n beweisen

Induktionsanfang $n = 1$

$J = (f) \subsetneq K[X_1]$ und hat somit positiven Grad und eine Nullstelle $a \in \bar{K}$. Also $V(J) \supset \{a\}$

Für den Induktionsschritt betrachten wir die Projektion

$\pi : A^n \to A^{n-1}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_2, \dots, a_n)$

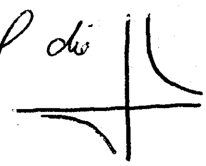
Für $I \subsetneq K[X_1, \dots, X_n]$ ist dann $I_1 = I \cap K[X_2, \dots, X_n]$ ebenfalls ein echtes Ideal und π induziert eine Abb

$V(I) \to V(I_1)$, da $I_1 \subset I$.

Wenn jetzt $a' = (a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$ ist, dann wollen wir einen Punkt $(a_1, a') \in V(I)$, der auf a' abgebildet wird.

Leider ist $\pi|_{V(I)} : V(I) \to V(I_1)$ im allgemeinen nicht surjektiv.

<u>Beispiel</u> $V(XY-1) \subset \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ Projektion auf die Y-Achse



Da $(XY-1) \cap K[Y] = I_1 = (0)$

gilt $V(I_1) = \mathbb{A}^1 \ni 0$

Also für $(a, 0) \in \pi^{-1}(0) \subset \mathbb{A}^2$ gilt $a \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$

und liegt nicht in $V(I)$.

$a \mapsto (\frac{1}{a}, a)$ parametrisier $V(XY-1)$

$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} = \infty \rightsquigarrow$ Proj. Raum

Dieses Phänomen würde nicht passieren, wenn I ein in X normiertes Polynom enthalten würde, etwa

$$f = X^n + c_1(Y) X^{n-1} + \dots + c_n(Y) \in I.$$

Denn dann wäre für $B \subset\subset \mathbb{C}$ relativ kompakt die Koeffizienten $c_i(b)$, $b \in B$ beschränkt und deshalb auch die Nullstellen von $f(x, b)$

Wir nehmen dies als einen guten Hinweis und erreichen die Formulierung von folgendem Theorem

1.10 <u>Thm</u> (Projektionssatz) $K = \overline{K}$, $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal welches ein in x_1 normiertes Polynom

$$f = x_1^d + c_1(x_2, \dots, x_n) x_1^{d-1} + \dots + c_d(x_2, \dots, x_n)$$

enthält. $c_i \in K[x_2, \dots, x_n]$

Dann induziert die Projektion $\pi_1 : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$, $a = (a_1, a')$ eine Surjektion $V(I) \to V(I_1)$, wobei $I_1 = I \cap K[x_2, \dots$

<u>Beweis</u>: $\pi(V(I)) \subset V(I_1)$ offensichtlich, da $I_1 \subset I_2$

Für die Umkehrung betrachte einen Punkt $a' \in V(I_1)$
$a' = (a_2, \dots, a_n)$ und den Ringhomomorph.

$$f_{a'} = f : K[x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow K[x_1]$$
$$g(x_1, \dots, x_n) \longmapsto g(x_1, a_2, \dots, a_n)$$

Zu zeigen ist dann $f(I) \subsetneq K[x_1]$, da dann $f(I) = (g(x_1))$ und jede Nullstelle a_1 von $g(x_1) \in K[x_1]$ löst alle Gleichungen von I.

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V(I)$.

$f_{a'}: K[x_1, \dots, x_n] \to K[x_1]$ ist für beliebiges $a' \in \mathbb{A}^{n-1}$ def. Es ist also folgendes zu zeigen a' mit $f_{a'}(I) = K[x_1]$ liegen nicht in $V(I_1)$ mit anderen Worten für a' mit $f_{a'}(I) = 1$ ist ein Polynom $h \in I_1$ zu konstr. mit $h(a') \neq 0$.

Schritt 1: Sei $a' \in \mathbb{A}^{n-1}$ ein Punkt mit $f_{a'}(I) = (1)$ existiert ein Polynom Für jedes $g \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $\tilde{g} \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $\tilde{g} \in K[x_1, \dots, x_n]$ $\deg_{x_1} \tilde{g} < d$, sodass $\tilde{g} \equiv g \mod I$ und $\tilde{g}(x_1, a') = 0$

Bew: Da $f_{a'}(I) = K[x_1]$ gibt es ein $g_1 \in I$, sodass $g_1(x_1, a') = g(x_1, a')$.

Wir setzen $g_2 = g - g_1$ und wenden Division mit Rest nach f an

$$g_2 = q f + \tilde{g} \quad \text{, wobei } \deg_{x_1} \tilde{g} < d = \deg_{x_1} f$$

(hier verwenden wir, dass f_0 normiert ist) a' einsetzen liefert die Division mit Rest von $g_2(x_1, a')$ nach $f(x_1, a')$. Aber $g_2(x_1, a') = 0$ also auch der Rest $\tilde{g}(x_1, a') = 0$.

Außerdem $g - \tilde{g} = g_1 + g_2 - g_2 + f q = g_1 + f q \in I$.

Schritt 2: Wir wenden die Aussage von Schritt 1 auf die Polynome $1, x_1, \dots, x_1^{d-1}$ an.

$$1 \equiv g_{00} + g_{01} x_1 + \dots + g_{0\,d-1} x_1^{d-1} \mod I \text{ mit}$$

$$x_1 \equiv g_{10} + g_{11} x_1 + \dots + g_{1,d-1} x_1^{d-1} \qquad g_{ij} \in K[x_2, \dots, x_n]$$

$$\vdots \qquad \text{und } g_{ij}(a') = 0$$

$$x^{d-1} \equiv g_{d-1,0} + \dots + g_{d-1,d-1} x_1^{d-1}$$

In Matrix Schreibweise, wobei $B = (a_{ij})$

$$(E_d - B)\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_1^{d-1}\end{pmatrix} \equiv 0 \mod I$$

nun liefert Multiplikation mit der Cofaktormatrix Adjungierten

$$\det(E_d - B)\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_1^{d-1}\end{pmatrix} \equiv 0 \mod I$$

Insbesondere gilt $h = \det(E_d - B) \in I \cap K[x_2, \dots, x_n]$ und $h(a') = 1 \neq 0$ □

<u>1.11. Def:</u> Ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ heißt homogen vom Grad d, wenn jeder Term von f

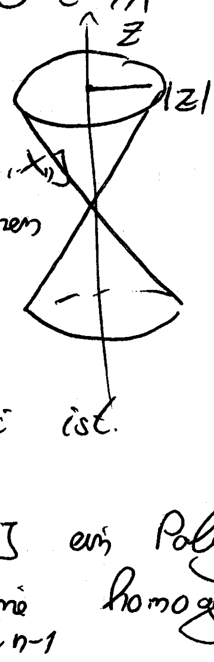
$$f = \sum f_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ mit } f_\alpha \neq 0$$

den Grad $d = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ hat, äquivalent, wenn

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \in K.$$

Das Nullstellengebilde einer homogenen Gleichung ist ein Kegel mit Spitze $0 \in \mathbb{A}^n$

<u>Bsp:</u> $V(x^2 + y^2 - z^2)$



Ein allgemeines Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ist eine Summe von homogenen Polynomen

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d,$$

wobei f_i homogen v. Grad i ist.

<u>1.12 Prop:</u> Sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom vom Grad d und $f = f_0 + \dots + f_d$ seine homogenen Bestandteile

(1) Sei $a' = (a_2, \dots, a_n) \in K^{n-1}$

Der Substitutionshomomorphismus

$$\varphi: K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[x_1, \dots, x_n]$$
$$x_1 \longmapsto x_1$$
$$x_2 \longmapsto x_2 + a_2 x_1$$
$$\vdots$$
$$x_n \longmapsto x_n + a_n x_1$$