In Matrix Schreibweise, wobei $B = (g_{ij})$

$$(E_d - B)\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots \\ x_1^{d-1}\end{pmatrix} \equiv 0 \mod I$$

nun liefert Multiplikation mit der Cofaktormatrix Adjungierten

$$\det(E_d - B)\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots \\ x_1^{d-1}\end{pmatrix} \equiv 0 \mod I$$

Insbesondere gilt $h = \det(E_d - B) \in I \cap K[x_2, \dots, x_n]$ und $h(a') = 1 \neq 0$ □

1.11. Def: Ein Polynom $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ heißt homogen vom Grad d, wenn jeder Term von f

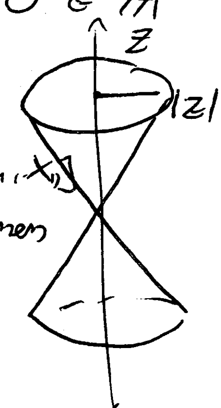
$$f = \sum f_\alpha X^\alpha, \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \text{ mit } f_\alpha \neq 0$$

den Grad $d = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ hat, äquivalent, wenn

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \in K.$$

Das Nullstellengebilde einer homogenen Gleichung ist ein Kegel mit Spitze $0 \in A^n$

Bsp: $V(x^2 + y^2 - z^2)$



Ein allgemeines Polynom $f \in K[X_1, X_n]$ ist eine Summe von homogenen Polynomen

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d,$$

wobei f_i homogen v. Grad i ist.

1.12 Prop: Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom vom Grad d und $f = f_0 + \dots + f_d$ seine homogenen Bestandteile

(1) Sei $a' = (a_2, \dots, a_n) \in K^{n-1}$

Der Substitutionshomomorphismus

$$\varphi : K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

$$\begin{aligned} X_1 &\longmapsto X_1 \\ X_2 &\longmapsto X_2 + a_2 X_1 \\ &\vdots \\ X_n &\longmapsto X_n + a_n X_1 \end{aligned}$$

bildet $\mathcal{F}$ auf das Polynom $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_d(1, a_2, \dots, a_n) X_1^d$ + Terme von niedrigerem Grad in X_1 ab.

(2) Ist K ein unendlicher Körper, dann können wir $(a_2, \dots, a_n) \in K^{n-1}$ finden, sodass $\mathcal{F}_d(1, \dots, a_n) \neq 0$ ist, also $f(\mathcal{F})$ zu einem in X_1 normierten Polynom assoziiert ist.

(3) Ist K ein endlicher Körper, so können wir dies mit einer nicht-linearen Koordinatentransformation erreichen.

Sei $k = \max\{\alpha_i \mid \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\mathcal{F}_\alpha \neq 0\} + 1$

Dann bildet die Koordinatentransformation

$$
\begin{aligned}
f : K[X_1, \dots, X_n] &\to K[X_1, \dots, X_n] \\
X_1 &\mapsto X_1 \\
X_2 &\mapsto X_2 + X_1^k \\
X_i &\mapsto X_i + X_1^{(k^i)} \\
X_n &\mapsto X_n + X_1^{(k^n)}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}$ auf das Polynom $f(\mathcal{F})$ ab, welches zu einem normierten Polynom assoziiert ist.

<u>Beweis</u> (1) Der einzige Term von $\mathcal{F}(X_1, X_2 + a_2 X_1, \dots, X_n + a_n X_1)$ von Grad d in X_1 ist

$$\mathcal{F}_d(X_1, a_2 X_1, \dots, a_n X_1) = X_1^d \mathcal{F}_d(1, a_2, \dots, a_n)$$

(2) Betrachte $g(X_2, \dots, X_n) = \mathcal{F}_d(1, X_2, \dots, X_n) \in K[X_2, \dots, X_n]$

Dies ist von Null verschieden, da $X_1 - 1$ kein Faktor von $\mathcal{F}_d$ ist.

<u>Übung 2.1</u> Zeigen Sie:
Die irreduziblen Faktoren eines homogenen Polynoms sind homogen.

Nach Aufgabe 1.2 existiert ein $a' = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^{n-1}($
sodass $\mathcal{F}_d(1, a_2, \dots, a_n) = g(a') \neq 0$.

(3) Wenn K ein endlicher Körper ist, dann kann es vorkommen, dass

$$\mathcal{F}_d(1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad \forall a' \in \mathbb{A}^{n-1}(K)$$

gilt.

Übung 22

Sei K ein endl. Körper mit q Elementen

(a) Geben Sie ein Polynom $f \in K[X_1,..,X_n] - \{0\}$ an mit $f(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^n(K)$

(b) $\mathbb{A}^n(K)$ als endliche Menge in $\mathbb{A}^n(\overline{K})$ ist algebraisch über $\overline{K}$.

Bestimmen Sie $I(\mathbb{A}^n(K)) \subset \overline{K}[X_1,..,X_n]$

Weiter im Beweis von (3)

$$\rho(X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}) = X_1^{\alpha_1 + \alpha_2 k + \cdots \alpha_i k^i + \cdots + \alpha_n k^n}$$

+ Terme von kleinerem Grad in X_1

Nach Definition von k sind Zahlen

$\alpha_1 + \alpha_2 k + \cdots + \alpha_n k^n$ für α mit $f_\alpha \neq 0$

alle voneinander verschieden (k-adische Darstellung)

Also die Leitterme $\rho(f_\alpha X^\alpha)$ bzgl. X_1 sind alle verschieden und daher $\rho(f)$ assoziiert zu einem in X_1 assoziierten Polynom.

Beweis schwacher Nullstellensatz

Wir verwenden Induktion nach n. Der Fall $n=1$ ist klar, da $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Im Fall $I \subset K[X_1,..,X_n]$ nehmen wir zunächst eine Koordinatentransformation wie in Proposition vor, um zu erreichen, dass $\rho(I) = J \subset K[X_1,..,X_n]$ ein in X_1 normiertes Polynom enthält.

Da $1 \notin I$ gilt auch $1 \notin J$, da $\rho: K[X_1,..,X_n] \to K[$ ein Isomorphismus ist mit Umkehrabb

ρ^{-1}, $X_1 \mapsto X_1$, $X_2 \mapsto X_2 - a_1 X_1$

bzw $X_2 \mapsto X_2 - X_1^k$ usw

Nach Induktionsvoraussetzung auf $J_1 = J \cap K[X_2,..,X_n]$ gilt $V(J_1) \neq \emptyset$

Nach dem Projektionssatz ex $b \in V(J) \subset \mathbb{A}^n$

Also finde ein Punkt $a = \Phi(b) \in V(I)$,

wobei $\Phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \mapsto (b_1, b_2 + a_2 b_1, \dots, b_n + a_n b_1)$

bzw $\mapsto (b_1, b_2 + b_1^{B}, \dots, b_n + b_1^{B^n})$ □

1.13 Bem Im Fall K ein unendlicher Körper können wir ein hinreichend allgemeine Koordinaten-Transformation finden

$$\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & * & & \\ a_{n1} & \cdots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen ist und Einträge in K hat.

$$f : K[x_1, \dots, x_n] \to K[x_1, \dots, x_n],$$

sodass $J = f(I) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ gilt.

Jedes der Eliminations Schale $J_k = J \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ ein in x_{k+1} normiertes Polynom g_{k+1} enthält, sofern $J_k \neq 0$ ist.

Hat g_{k+1} Grad d_{k+1} in x_{k+1}, so haben wir in jedem Projektionsschritt wenigstens ein aber höchstens d_{k+1} Urbildpunkte, da $g_{k+1}(x_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$ Grad d_{k+1} hat.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \supset & V(J) \\ \downarrow & & \\ \mathbb{A}^{n-1} & \supset & V(J_1) \\ \downarrow & & \\ \vdots & & \\ \mathbb{A}^{n-c} & = & V(J_c) \\ \multicolumn{3}{l}{\text{wobei } J_c = 0,\ J_{c-1} \neq 0} \end{array}}$$

Insgesamt haben wir für den Punkt $a'' = (a_{c+1}, \dots, a_n)$ aus $\mathbb{A}^{n-c}$ wenigstens einen Punkt $a = (a_1, \dots, a_c, a_{c+1}, \dots, a_n) \in V(J)$ und höchstens $d_1 \cdots d_c$ Punkte

1.14 Korollar: Sei $K = \bar{K}$. Die Abbildung

$$\{A \subset \mathbb{A}^n\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideal } J \subset K[x_1, \dots, x_n]\}$$

$$A \mapsto I(A)$$
$$V(J) \leftarrow J$$

induzieren inverse Bijektionen:

$$\{A \subset \mathbb{A}^n \mid A \text{ ist alg über } K\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale} \\ \text{in } K[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{Punkte } a \in A\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{maximale Ideale} \\ \text{in } K[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}$$

__Beweis:__ Das für algebraische Teilmengen $V(I(A)) = A$ gilt war leicht zu sehen.
Für J Radikalideal gilt $I(V(J)) = \text{rad}\, J = J$ nach Hilbertschem Nullstellensatz.
Es bleibt die maximalen Ideale in $\bar{K}[x_1, \dots, x_n]$ zu bestimmen.
Zunächst $a = (a_1, \dots, a_n)$, $I(a) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

$$= \text{Kern}\left(\begin{array}{ccc} \bar{K}[x_1, \dots, x_n] & \to & \bar{K} \\ x_i & \mapsto & a_i \end{array} \right)$$

Also $\bar{K}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]/_{I(a)} \cong \bar{K}$ ist ein Körper und $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ ist ein maximales Ideal.
Für die Umkehrung sei $\mathfrak{m} \subsetneq \bar{K}[x_1, \dots, x_n]$ maximal.
Dann $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.
Sei $a \in V(\mathfrak{m})$, $\{a\} \subset V(\mathfrak{m})$ und I anwenden gibt $I(a) = I(\{a\}) \supset I(V(\mathfrak{m})) = \text{rad}\, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$
Da $\mathfrak{m}$ maximal ist gilt $I(a) = \mathfrak{m}$.

1.15 Definition: Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge, $I = I(A) \subset \bar{K}[x_1, \dots, x_n]$ das zugehörige Verschwindungsideal. Dann heißt

$$\bar{K}[A] = \bar{K}[x_1, \dots, x_n]/_{I(A)}$$

der Koordinatenring von A.