1.14 Korollar: Sei $K = \overline{K}$. Die Abbildung

$$\{A \subset \mathbb{A}^n\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideal } J \subset K[x_1, \dots, x_n]\}$$

$$A \longmapsto I(A)$$
$$V(J) \longleftarrow J$$

induzieren inverse Bijektionen:

$$\{A \subset \mathbb{A}^n \mid A \text{ ist alg über } K\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{Radikalideale} \\ \text{in } K[x_1, \dots, x_n]\end{matrix}\right\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{Punkte } a \in A\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{maximale Ideale} \\ \text{in } K[x_1, \dots, x_n]\end{matrix}\right\}$$

Beweis: Das für algebraische Teilmengen $V(I(A)) = A$ gilt war leicht zu sehen.
Für J Radikalideal gilt $I(V(J)) = \operatorname{rad} J = J$ nach Hilbertschem Nullstellensatz.
Es bleibt die maximalen Ideale in $\overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ zu bestimmen.
Zunächst $a = (a_1, \dots, a_n)$, $I(a) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

$$= \operatorname{Kern}\left(\overline{K}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{K}, \; x_i \mapsto a_i\right)$$

Also $\overline{K}[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n] / I(a) \cong \overline{K}$ ist ein Körper und $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ ist ein maximales Ideal.
Für die Umkehrung sei $\mathfrak{m} \subsetneq \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ maximal.
Dann $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.
Sei $a \in V(\mathfrak{m})$, $\{a\} \subset V(\mathfrak{m})$ und I anwenden
gibt $I(a) = I(\{a\}) \supset I(V(\mathfrak{m})) = \operatorname{rad} \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$
Da $\mathfrak{m}$ maximal ist gilt $I(a) = \mathfrak{m}$.

1.15 Definition: Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge, $I = I(A) \subset \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ das zugehörige Verschwindungsideal. Dann heißt

$$\overline{K}[A] = \overline{K}[x_1, \dots, x_n] / I(A)$$

der Koordinatenring von A.

Da $\bar{K}$ ein unendlicher Körper ist gibt es eine $\bar{K}$-Algebra Inklusion

$$\begin{tikzcd}
\bar{K}[x_1,\dots,x_n] \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bar{K}^{(\mathbb{A}^n)} = \{f : \mathbb{A}^n \to \bar{K} \text{ Abbild}\} \arrow[d] \\
& \bar{K}^{A} = \{f : A \to \bar{K}\}
\end{tikzcd}$$

Einschränken auf A liefert

Die Komposition φ hat $I(A)$ als Kern

Also $\bar{K}[A] = \bar{K}[x_1,\dots,x_n]/_{I(A)} \cong \text{Bild}(\varphi) = \bar{K}$-Unteralgebra von $\bar{K}^A$, die durch die Koordinatenfunktionen

$$x_{i|A} : A \to \bar{K}$$

erzeugt wird.

<u>Übungsaufgabe 2.3</u> Sei $K = \bar{K}$ und $A = \{P_1,\dots,P_d\} \subset \mathbb{A}^n$ eine endliche Menge.

Dann gilt:

$$\bar{K}[A] \cong \bar{K}^A = \{f : A \to \bar{K}\} \cong \prod_{p\in A} \underbrace{\left(\bar{K}[x_1,\dots,x_n]/_{I(p)}\right)}_{\cong \bar{K}}$$

<u>1.16 Def</u>: Es seien $A \subset \mathbb{A}^n$ und $B \subset \mathbb{A}^n$ zwei algebraische Mengen. Eine polynomiale Abbildung bzw Morphismus $f : A \to B$ ist eine Abbildung, sodass für jedes $g \in \underset{\bar{K}[Y_1,\dots,Y_m]/I(B)}{\bar{K}[B]}$ die Komposition

$$g\circ f : A \to \bar{K}$$

eine Polynomfunktion auf A ist.

<u>Beispiel</u>: Ein Morphismus $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ ist durch m-Tupel in Polynomen $f_1,\dots,f_m \in \bar{K}[x_1,\dots,x_n]$ gegeben.

$$f(a) = (f_1(a),\dots,f_m(a))$$

In der Tat $Y_i \in \bar{K}[Y_1,\dots,Y_m]$ gibt die Funktion

$$Y_i : \mathbb{A}^m \to \bar{K}$$

und $Y_i \circ f = f_i \in \bar{K}[x_1,\dots,x_n]$ und $b = (b_1,\dots,b_m) = f(a)$

$$\begin{aligned}
b &= (Y_1(b),\dots,Y_m(b)) \\
&= ((Y_1\circ f)(a),\dots,(Y_m\circ f)(a)) \\
&= (f_1(a),\dots,f_m(a))
\end{aligned}$$

Umgekehrt ist für $g \in K[Y_1,\dots,Y_m]$: $g \circ f = g(f_1,\dots,f_m)$ aus $\bar{K}[X_1,\dots,X_n]$, da wenn man Polynome in ein Polynom einsetzt ein Polynom bekommt.

<u>Prop</u>: Ein Morphismus $f: A \to B$ zwischen algebraischen Mengen lässt sich zu einem kommutativen Diagramm fortsetzen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xrightarrow{(f_1,\dots,f_m)} & \mathbb{A}^m \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Umgekehrt jede Tupel $(f_1,\dots,f_m)$ aus $\bar{K}[X_1,\dots,X_n]$ induziert ein Morphismus $f: A \to B$ genau dann wenn $(f_1(a),\dots,f_m(a)) \in B \;\forall a \in A$.

<u>Beweis</u>: Sei $f: A \to B$ gegeben, $Y_i|_B \in \bar{K}[B]$ und $Y_i|_B \circ f = f_i \in \bar{K}[A] = \bar{K}[X_1,\dots,X_n]/_{I(A)}$.
Sei $f_i \in \bar{K}[X_1,\dots,X_n]$ ein Repräsentant.
Dann ist $\mathbb{A}^n \xrightarrow[(f_1,\dots,f_m)]{} \mathbb{A}^m$ die gesuchte Erweiterung.
Umgekehrt $(f_1,\dots,f_m)$ gegeben mit $(f_1(a),\dots,f_m(a)) \in B$ dann induziert $(f_1,\dots,f_m)$ eine Abbildung $f: A \to B$ und $Y_i|_B \circ f = f_i|_A \in \bar{K}[A]$ und deshalb gibt auch jedes Polynom g in $Y_1|_B,\dots,Y_m|_B$ eine Polynomfunktion $g \circ f = g(f_1|_A,\dots,f_m|_A) \in \bar{K}[A]$

<u>1.17 Def</u>: Zwei algebraische Mengen $A \subset \mathbb{A}^n$ und $B \subset \mathbb{A}^m$ heißen <u>isomorph</u>, wenn es Morphismen
$f: A \to B$ und $\psi: B \to A$
gibt mit $\psi \circ f = id_A$, $f \circ \psi = id_B$
Zu $f: A \to B$ ein Morphismus bezeichnet $f^*: \bar{K}[B] \to \bar{K}[A]$, $g \mapsto g \circ f$

Zwei algebraische Mengen A, B sind genau dann isomorph, wenn $\bar{K}[A] \cong \bar{K}[B]$ als $\bar{K}$-Algebra

<u>Übungsaufgabe 2.4</u> Zeigen Sie
$A = V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2$ (Parabel) und $B = V(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2$ (Hyperbel) sind <u>nicht</u> isomorph

Damit ist die Kategorie der algebraischen Mengen erklärt

Objekte: Algebraische Mengen definiert $A, B \subset \bar{K}$

Morphismen: Polynomiale Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{Alg}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{Alg}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{Alg}(A,C)$$
$$\varphi \qquad\qquad \psi \qquad\qquad \psi\circ\varphi$$

1.18 Der kontravariante Funktor

$$\bar{K}[-]: \{\text{alg Menge}\} \to \{K\text{-Algebra}\}$$

\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \bar{K}[A] \\
B \arrow[r, mapsto] & \bar{K}[B] \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}

identifiziert die Kategorie der algebraischen Mengen mit einer Unterkategorie der endlich erzeugten $\bar{K}$-Algebren

Welche $\bar{K}$-Algebren treten auf?

Def. Sei $f \in R$ ein Element in einem Ring R.

f heißt nilpotent, wenn ein $n > 0$ existiert mit $f^n = 0$.
Ein Ring heißt reduziert, wenn $0 \in R$ das einzige nilpotente Element ist.

Ein Restklassenring $K[X_1,..,X_n]/I$ ist genau dann reduziert, wenn $I = \mathrm{rad}(I)$ ein Radikal ist.

Das Bild des „Funktors" $\bar{K}[\;]$ besteht aus den endlich erzeugten reduzierten $\bar{K}$-Algebren.

Das Studium von algebraischen Mengen bis auf Isomorphie ist ein wichtiger Abstraktionsschritt.

Der Unterschied zwischen einer algebraischen Menge $A \subset \mathbb{A}^n$ und deren Isomorphieklasse ist die Wahl eines $\bar{K}$-Algebrasystems $\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n$ von $\bar{K}[A]$, $(\bar{X}_1,..,\bar{X}_n): A \to \mathbb{A}^n$ und dies ist eine Einbettung genau dann, wenn $\bar{K}[X_1,..,X_n] \to \bar{K}[A]$, $X_i \mapsto \bar{X}_i$ surjektiv ist.

<u>1.19 Bemerkung</u>: Für $\varphi: A \to B$ ein Morphismus zwischen algebraischen Mengen ist das Bild $\varphi(A) \subset B$ im allgemeinen keine algebraische Menge

<u>Beispiel</u>: $A = V(XY-1)$, $B = V(X) \cong \mathbb{A}^1$ die Y-Achse

$\varphi: (\frac{1}{a}, a) \mapsto a$,

$$\rho^*: \bar{K}[B] = \bar{K}[Y] \longrightarrow \bar{K}[X,Y]/_{(XY-1)} = \bar{K}[A]$$
$$Y \longmapsto \bar{Y}$$

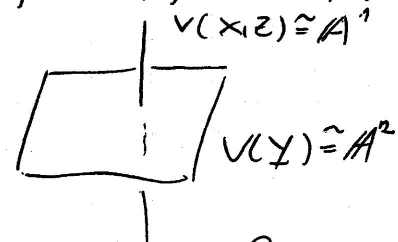
hat das Bild $\rho(A) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$

1.20 Wir haben gesehen, dass Radikalideale $\subset \bar{K}[X_1 .. X_n]$ algebraische $A \subset \mathbb{A}^n$ entsprechen und maximale Ideale Punkte von $\mathbb{A}^n$

Was ist mit Primidealen?

<u>Def.</u> Eine algebraische Menge $A \subset \mathbb{A}^n$ heißt irreduzibel, wenn aus $A = A_1 \cup A_2$, A_j alg. Mengen aus $\mathbb{A}^n$ $A = A_1$ oder $A = A_2$ folgt.
Andernfalls heißt A reduzibel

<u>Beispiel:</u> $V(XY, YZ) = V(Y) \cup V(X,Z)$ ist reduzibel



<u>1.21 Prop:</u> Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge $I(A) \subset \bar{K}[X_1,.,X_n]$ das zugehörige Ideal.

Äquivalent sind

(1) A ist irreduzibel

(2) $I(A)$ ist ein Primideal

(3) $K[A]$ ist ein Integritätsring

<u>Beweis:</u> (1) $\Rightarrow$ (2)

Angenommen $I(A)$ ist kein Primideal etwa $f_1, f_2 \in \bar{K}[X_1,.,X_n]$ mit $f_1 \cdot f_2 \in I(A)$ aber $f_1 \notin I(A)$ und $f_2 \notin I(A)$

Dann gilt

$$A_1 = V(I(A) + (f_1)) = A \cap V(f_1) \subsetneq A$$
$$A_2 = A \cap V(f_2) \subsetneq A \text{, da } f_1, f_2 \notin I(A)$$

Außerdem

$$A = A \cap V(f_1 f_2) = A \cap (V(f_1) \cup V(f_2)) = A_1 \cup A_2$$

also ist A reduzibel.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Angenommen $A = A_1 \cup A_2$ ist reduzibel $A_1, A_2 \subsetneq A$.

Damit gilt $I(A) \subsetneq I(A_i)$ und es ex $f_i \in I(A_i) \setminus I(A)$

Es verschwindet $f_1 f_2$ auf A_1 und A_2 also auf A

Somit also $f_1 f_2 \in I(A)$ und $I(A)$ ist kein Primideal.

1.21 Zusammenfassung des Algebra - Geometrie Wörterbuchs

$$\{\text{Teilmengen von } \mathbb{A}^n\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideale in } \bar{K}[x_1, .., x_n]\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{Algebraische Mengen}\} \longleftrightarrow \{\text{Radikalideale}\}$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$\{\text{irreduzible alg Mengen}\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale}\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{Punkte in } \mathbb{A}^n\} \longleftrightarrow \{\text{maximale Ideale}\}$$

Ferner

$$\{\text{Morphismen } A \xrightarrow{f} B\} \longleftrightarrow \{K\text{-Algebren Hom } \bar{K}[B] \xrightarrow{f^*} \bar{K}[A]\}$$

<u>1.22 Thm</u> Jede algebraische Menge $A \subset \mathbb{A}^n$ ist eine endliche Vereinigung $A = C_1 \cup .. \cup C_r$ von irreduziblen algebraischen Mengen. Ist die Zerlegung irredudant, d.h. $C_i \not\subset C_j$ für $i \neq j$ dann sind die Komponenten bis auf Reihenfolge durch A eindeutig bestimmt.

<u>Beweis</u>: Die Existenz ist typisches Beispiel von noetherscher Induktion.

Da $\bar{K}[x_1, .., x_n]$ noethersch ist, sind die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt

(1) Jede aufsteigende Kette von Idealen wird stationär

(2) Jede nicht leere Menge von Idealen hat ein max. Element bzgl. Inklusion

(3) Jedes Ideal ist endlich erzeugt.

Das Wörterbuch zeigt, dass jede nicht leere Menge von algebraischen Menge hat bzgl. Inklusion ein kleinstes Element.

Sei $M = \{ A \subset \mathbb{A}^n \mid A$ algebraisch, A ist nicht Vereinigung v endl. vielen irred. Teilmengen$\}$

Zu zeigen ist $M = \emptyset$.

Angenommen nicht. Dann existiert ein bzgl. Inklusion kleinstes Element $A \in M$. A ist nicht irreduzibel

Also $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_i \subsetneqq A$.

$A = C_1 \cup \dots \cup C_r$, $A_2 = C_1' \cup \dots \cup C_{r'}$

Dann gilt $A = C_1 \cup \dots \cup C_r \cup C_1' \cup \dots \cup C_{r'}$.

<u>Eindeutigkeit:</u> $C_1 \cup \dots \cup C_r = C_1' \cup \dots \cup C_s'$ beide Zerlegungen irredundant.

Induktion nach r.

<u>$r=1$.</u> Für $r = 1 \Rightarrow s = 1$, da C irreduzibel

$C = A_1 \cup A_2$ damit $C = A_1$ oder A_2

$C = A_1 \cup \dots \cup A_n$ damit $C = A_i$

<u>$r-1 \leadsto r$:</u> $C_r = A \cap C_r = C_r \cap (C_1' \cup \dots \cup C_s') = (C_r \cap C_1') \cup \dots \cup (C_r \cap C_s')$

Damit $C_r = C_r \cap C_j'$ o.E $j = s$

$C_s' = C_s' \cap C_i$ Also $C_r = C_r \cap C_s' \cap C_i \subset C_i$

Da Mengen irredundant ist $i = r$

$\Rightarrow C_r = C_r \cap C_j'$, $C_s' = C_s' \cap C_r$

Also $C_r = C_s'$ und $C_1 \cup \dots \cup C_{r-1} = C_1' \cup \dots \cup C_{s-1}'$

und die Induktion greift.

<u>Korollar:</u> Sei $J \subset \bar{K}[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal, $\bar{K} = K$

Dann gilt. $J = P_1 \cap \dots \cap P_r$, wobei die P_i Primideale sind.

<u>Beweis:</u> $J = \operatorname{rad}(J) = I(\underbrace{V(J)}_{=A}) = I(C_1 \cup \dots \cup C_r)$

$= \underbrace{I(C_1)}_{P_1} \cap \dots \cap \underbrace{I(C_r)}_{P_r}$ □

<u>1.24 Def.</u> Sei $C \subset \mathbb{A}^n$ eine irreduzible algebraische Menge. Dann ist $\bar{K}[C]$ ein Integritätsring und dessen Quotientenkörper $\bar{K}(C) = Q(\bar{K}[C])$ nennen wir den <u>Körper</u> der <u>rationalen Funktionen</u> auf C. und

$\dim C = \operatorname{tr\,deg}_{\bar{K}} \bar{K}(C)$

heißt Dimension von C.