UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Christian Bopp

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Sommersemester 2018

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 14.00 Uhr, am 20.06.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 10 — 13.05.2018

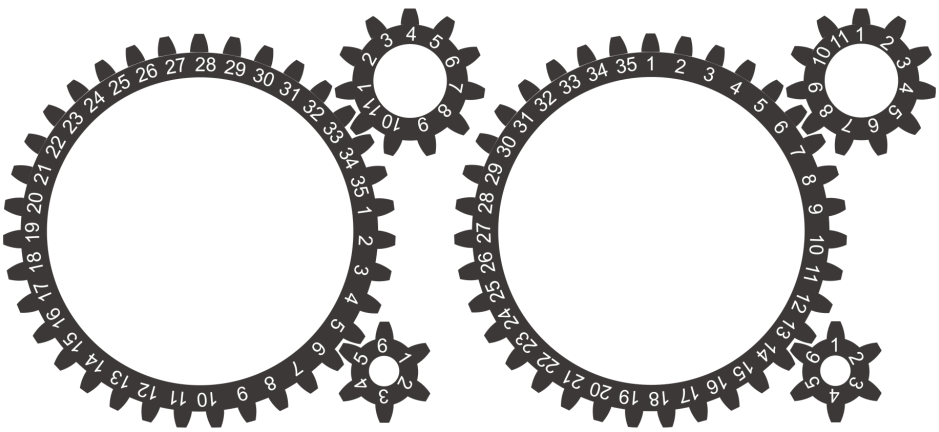
Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz von Wilson: Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Primzahl, wenn

$$(p-1)! := (p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots 2\cdot 1 \equiv -1 \mod p.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die kleinste positive Zahl $x \in \mathbb{Z}$, welche die folgende simultane Kongruenz löst

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \bmod 5 \\ x &\equiv 4 \bmod 7 \\ x &\equiv 5 \bmod 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Lassen sich die folgenden Konfigurationen von Zahnrädern ineinander überführen? Falls ja, um wieviele Schritte muss man dafür drehen?



Aufgabe 4. Eine zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Carmichael-Zahl*, wenn für alle zu n teilerfremden Zahlen gilt, dass

$$a^n \equiv a \mod n.$$

Carmichael-Zahl sind also zusammengesetzte Zahlen, für die Aussage des kleinen Satzes von Fermat gilt.
Die Existenz solcher Zahlen ist ein Problem, wenn man algorithmisch nach großen Primzahlen sucht, da Carmichael-Zahlen nur schwer von echten Primzahlen zu unterscheiden sind.
Zeigen Sie, dass $c = 172081 = 7\cdot 13\cdot 31\cdot 61$ eine Carmichael-Zahl ist. Zeigen Sie hierzu den Satz von Korselt: Ist $n = p_1\cdot\cdots\cdot p_k$ das Produkt aus k verschiedenen Primzahlen sodass $(p_i-1)\big|(n-1)$ für alle $i = 1,\ldots,k$ gilt, so ist n eine Carmichael Zahl.