UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Christian Bopp

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Sommersemester 2018

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 14.00 Uhr, am 09.05.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4   02.05.2018

Aufgabe 1. In der Definition einer Gruppe G wurde die Existenz eines beidseitig Inversen gefordert, d.h. für alle $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $a \circ b = e_G = b \circ a$. Zeigen Sie: Es reicht zu fordern, dass ein links-inverses Element existiert, d.h. für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $b \circ a = e_G$.
Zeigen Sie zudem, dass auch die Existenz eines links-neutralen Elements in der Definition einer Gruppe ausreicht.

Aufgabe 2. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = e_G \quad \text{wobei } g^2 = g \cdot g.$$

Aufgabe 3. Sei M eine nichtleere Menge und G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass eine Gruppenstruktur auf der Menge

$$G^M := \{f : M \to G\}$$

definiert werden kann. Zeigen Sie zudem, dass

$$G^{(M)} := \{f : M \to G \mid f(m) = e_G \text{ für alle bis auf endlich viele } m \in M\} \subset G^M$$

eine Untergruppe bildet.

Aufgabe 4. Mit

$$\mathbb{Q}[x] = \Big\{ f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \;\Big|\; a_i \in \mathbb{Q} \text{ und } a_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in \mathbb{N} \Big\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Polynome in einer Variablen x und Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Für $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ und $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in \mathbb{Q}[x]$ definieren wir

$$f + g = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

und

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[x]$ bezüglich dieser Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Man nennt $\mathbb{Q}[x]$ den *Polynomring* in einer Variablen über dem Körper $\mathbb{Q}$.
Wir bezeichnen ferner mit $\mathbb{Q}[x]_{\leq n} = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$ die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$. Ist auch $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ bezüglich der oben angegebenen Verknüpfungen ein Ring?