UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Christian Bopp

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Sommersemester 2018

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 14.00 Uhr, am 16.05.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 5 09.05.2018

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass $133 \big| 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $12 \big| n^4 + 11n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 1911 und 3464. Bestimmen Sie zudem $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(1911, 3464) = x \cdot 1911 + y \cdot 3464$.

Aufgabe 3. In der Vorlesung haben wir den den größten gemeinsamen Teiler für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert. Für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ definieren wir allgemeiner $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ als die größte ganze Zahl, die a, b und c teilt.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$.
(b) Zeigen Sie, dass $x, y, z \in \mathbb{Z}$ existieren mit $\mathrm{ggT}(a, b, c) = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$.
(c) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(252, 378, 168)$.
(d) Finden Sie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(252, 378, 168) = x \cdot 252 + y \cdot 378 + z \cdot 168$.

Aufgabe 4. Die Fibonacci Zahlen werden rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

(a) Zeigen Sie, dass f_n und f_{n+1} stets teilerfremd sind.
(Hinweis: Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(f_{n+1}, f_n) = \mathrm{ggT}(f_n, f_{n-1})$ und argumentieren Sie induktiv).
(b) Zeigen Sie, dass für $n, m \geq 2$ gilt: $f_{n+m} = f_n \cdot f_{m+1} + f_m \cdot f_{n-1}$.
(c) Es gelte $n \big| m$. Zeigen Sie, dass auch $f_n \big| f_m$ gilt.