UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Christian Bopp

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Sommersemester 2018

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 14.00 Uhr, am 23.05.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 6 — 16.05.2018

Aufgabe 1. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Summe von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen. Zeigen Sie, dass n durch 3 teilbar ist.
(b) Ist eine Summe von 4 aufeinander folgenden Zahlen immer durch 4 teilbar?
(c) Formulieren und beweisen Sie die allgemeine Aussage für Summen von aufeinanderfolgenden Zahlen.

Aufgabe 2. Seien

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p} \quad \text{und} \quad m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{m_p}$$

die Primfaktorzerlegungen der natürlichen Zahlen n und m. Zeigen Sie, dass
(a) $\operatorname{ggT}(n,m) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{min(n_p,m_p)}$ und $\operatorname{kgV}(n,m) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(n_p,m_p)}$
(b) $n \cdot m = \operatorname{ggT}(n,m) \cdot \operatorname{kgV}(n,m)$.
(c) $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$ ist genau dann ein Quadrat, wenn alle Exponenten n_p in der Primfaktorzerlegung gerade sind.
(d) Finden Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl 3234846615 mittels Probedivision (Sie dürfen hierfür einen Taschenrechner verwenden).

Aufgabe 3. Sei $M = \{4n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir nennen eine Zahl $p \in M \setminus \{1\}$ *Premzahl*, wenn 1 und p die einzigen Teiler von p in M sind (dies ist keine offizielle Bezeichnung). Die ersten Premzahlen sind also $5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, 53, 57, 61, 69, 73, 77$
(a) Zeigen Sie, dass jede Zahl $p \in M \setminus \{1\}$ von einer Premzahl geteilt wird.
(b) Zeigen Sie, dass jedes $p \in M \setminus \{1\}$ als Produkt von Premzahlen geschrieben werden kann.
(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Premzahlen gibt.

Aufgabe 4. Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d \big| n$. Zeigen Sie, dass $(2^d - 1) \big| (2^n - 1)$. Folgern Sie zudem, dass $2^n - 1$ nur dann eine Primzahl sein kann, wenn n selbst eine Primzahl ist.