§1 Natürliche Zahlen

11.04.18

Nach Leopold Kronecker (1823-1891) sind die natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ zusammen mit der üblichen Addition & Multiplikation von Gott gegeben.
Wir möchten die natürlichen Zahlen axiomatisch definieren.
Hierzu verwenden wir die Peano-Axiome.

Def 1.1 (Peano-Axiome)
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, wird durch die folgende Axiome charakterisiert.

(1) Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht leer. Es existiert ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.

(2) Zu jedem Element $n \in \mathbb{N}$ existiert ein wohlbestimmtes Element $n^* \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n^*$. Das Element $n^* \in \mathbb{N}$ wird der (unmittelbare) Nachfolger von $n \in \mathbb{N}$ genannt

(3) Es gibt kein Element $n \in \mathbb{N}$ für dessen Nachfolger $n^* = 0$ gilt. Das heißt das Element $0 \in \mathbb{N}$ besitzt keinen Vorgänger und ist somit das „erste" Element von $\mathbb{N}$.

(4) Besteht für zwei natürliche Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $n_1^* = n_2^*$, so folgt daraus, dass $n_1 = n_2$ ist. D.h. die Nachfolgeabb $*: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to n^*$ ist injektiv.

(5) (Prinzip der vollständigen Induktion)
Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $0 \in T$ (Induktionsanfang) und die Eigenschaft, dass mit $t \in T$ (Induktionsvoraussetzung) auch $t^* \in T$ ist. (Induktionsschritt)
Dann ist $T \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.2.

- Sukzessive legen wir mit Hilfe von Def 1.1. die folgenden wohlvertrauten Bezeichnungen fest:

  $1 := 0^*$

  $2 := 1^* = 0^{**}$

  $\vdots$

- Axiom (5) bildet die Grundlage für die Beweistechnik der vollständigen Induktion.
  Soll eine Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen überprüft werden, so weist man diese Eigenschaft für $0 \in \mathbb{N}$ nach (IA). Nimmt man an, dass diese Eigenschaft für $0, \ldots, n$ erfüllt ist (I.V / I.B) so zeigt man nun dass auch n^* diese Eigenschaft hat. Dann ist diese Eigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.
- Die Beweistechnik der vollständigen Induktion lässt sich folgendermaßen modifizieren:
  Sei $T \subset \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $n_0 \in T$ (IA) und dass mit $t \in T$ (IV) auch $t^* \in T$ (IS)
  Dann muss $T = \{n_0, n_0^*, n_0^{**}, \ldots\}$.
  Die entsprechenden Induktionsbeweise umfassen dann nicht mehr ganz $\mathbb{N}$.

Def. 1.3

Addition & Multiplikation natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ werden induktiv wie folgt definiert:

Addition: $n+0 := n$, $n+m^* := (n+m)^*$

bzw.

Multiplikation: $n \cdot 0 := 0$, $n \cdot m^* := (n \cdot m) + n$

Dies definiert in der Tat die übliche Addition & Multipl. wie man sie aus der Schule kennt.

$n+1 = n+0^* = (n+0)^* = n^*$

$n+2 = n+0^{**} = (n+0^*)^* = (n+1)^* = n^{**}$

Analog für $m \cdot n$.

Auch die bekannten Rechenregeln lassen sich mit Hilfe der Peano-Axiome nachweisen.

Lemma 1.4

Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) Assoziativgesetz $n+(m+p) = (n+m)+p$

$n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$

(2) Kommutativgesetz $n+m = m+n$

$n \cdot m = m \cdot n$

(3) Distributivgesetz $(n+m) \cdot p = (n \cdot p)(m \cdot p)$

Beweis:

Wir werden exemplarisch (2) nachrechnen.

Wir verwenden vollst. Induktion nach n und m

I.A.: $m=0$. Wir müssen $n+0 = 0+n \ \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen.

Da nach Def. 1.3. $n+0 = n$ müssen wir $0+n = n$ zeigen.

(I.A) Für $n=0$ ist die Beh. richtig.

(I.V) Die Beh. sei für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(I.S) Mit Def. 1.3. und der I.V. folgt

$0+n^* = (0+n)^* \overset{I.V.}{=} n^*$

Dies zeigt $0+n=n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

I.V: Für $m \in \mathbb{N}$ gelte $n+m = m+n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

I.S: Wollen $n+m^* = m^*+n \ \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen

Dazu zeigen wir zunächst folgende Identität

(#) $m^*+n = (m+n)^* \ \forall n \in \mathbb{N}$

I.A: Für $n=0$ folgt die Aussage aus Def. 1.3

I.V: $m^*+n = (m+n)^*$ für ein $n \in \mathbb{N}$

I.S: wollen $m^*+n^* = (m+n^*)^*$ zeigen

Dies folgt, da

$m^*+n^* = (m^*+n)^* = ((m+n)^*)^* = (m+n^*)^*$

Wir können nun den Induktionsschritt nach m abschließen.

Mit Def 1.3. der I.V. und der eben bewiesenen Identität

(#) folgt: $n+m^* \overset{Def}{=} (n+m)^* \overset{I.V.}{=} (m+n)^* \overset{(\#)}{=} m^*+n$.

Dies zeigt die Kommutativität der Addition.

Bemerkung 1.5.

- Mit dem Distributivgesetz sieht man, dass die Multiplikation "Stärker" ist als die Addition
- Meist lässt man beim Schreiben den „Malpunkt" weg.

Def 1.6. (Potenzen)

Seien $a, m \in \mathbb{N}$

$a^0 := 1$

$a^{m^*} := a^m \cdot a$

Lemma 1.7

Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Def. 1.8

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass m kleiner oder gleich n ist falls $m = n$ oder m irgendein Vorgänger von n ist. Schließt man $m = n$ aus, dann nennen wir $m < n$ & sagen m ist (echt) kleiner als n. $(n \neq 0)$

Analog für $\geq, >$.

Bemerkung 1.9

Mit der Relation $<$ wird $\mathbb{N}$ zu einer geordneten Menge, d.h.

(i) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m < n$, $n < m$ oder $m = n$

(ii) Die 3 Relationen $m < n$, $n < m$ und $n = m$ schließen sich gegenseitig aus.

(iii) Aus $m < n$ und $n < p$ folgt $m < p$.

Entsprechendes für „$>$"

Bemerkung 1.10

Für die Relation $<$ gelten bzgl. Addition & Multiplikation die folgenden Rechenregeln:

(i) $\forall p \in \mathbb{N}$ gilt mit $m < n$ auch $m + p < n + p$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}$ gilt mit $m < n$ auch $p \cdot m < p \cdot n$

⌈ Notation: Wir schreiben $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ⌋

Lemma 1.11 (Prinzip des kleinsten Elements)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine nicht-leere Teilmenge, dann besitzt M ein kleinstes Element m_0, d.h. für alle $m \in M$ gilt $m \geq m_0$.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage durch Induktion

Sei $A(n)$ die Aussage / Eigenschaft: „Wenn M ein Element $\leq n$ enthält, so hat M ein kleinstes Element."

I.A. $A(0)$ ist wahr, denn enthält M die 0, so ist 0 das kleinste Element

I.V. $A(n)$ sei wahr für $n \in \mathbb{N}$

I.S. wollen zeigen dass "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"

Ist M eine Menge, die ein Element $\leq n+1$ enthält, dann ist entweder $n+1$ das kleinste Element, oder es gibt noch ein kleineres, welches dann aber $\leq n$ ist. Wegen I.V. ist $A(n)$ wahr & M enthält ein kleinstes Element.

Bemerkung 1.12

(1) Das Prinzip des kleinsten Elements ist äquivalent zum Induktionsprinzip 18.04.18

(2) In der Praxis ist nicht immer klar, wie man ein solches kleinstes Element bestimmt

z.B. ist bekannt, dass ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass alle Zahlen $\geq m_0$ sich als Summe von höchstens sieben 3-ten Potenzen schreiben lassen. Nach dem Prinzip des kleinsten Elements existiert ein kleinstes solches m_0. Dieses ist jedoch nicht bekannt.

Definition 1.13

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Dann bezeichnet $(m-n)$ die natürliche Zahl, welche der Gleichung $n + (m-n) = m$ genügt. Wir nennen $(m-n)$ die Differenz von m und n.

Bemerkung 1.14

Wir möchten den Zahlbereich erweitern, sodass für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $n + x = m$ eine Lösung hat.

§ 2 Die ganzen & rationalen Zahlen

Um die ganzen- und rationalen Zahlen zu konstruieren, benötigen wir das allgemeine Konzept der Äquivalenzrelation

Definition 2.1.
Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $R \subset A \times B$ heißt Relation zwischen A und B. Ist $A = B$ so spricht man von einer Relation auf A.
⌈ Beliebige Relationen sind nicht besonders interessant. Spezielle Relationen hingegen sind sehr nützlich zur Konstruktion von algebraischen Strukturen.
D.h. man spezifiziert die Menge R durch bestimmte Eigenschaften. ⌋
Sind $(a,b) \in R$ so sagen wir, dass die Elemente a und b in Relation zueinander stehen. Häufig schreibt man dafür auch $a \sim b$ ($a \sim_R b$)
Eine Relation R auf A heißt
reflexiv : $\Leftrightarrow$ für alle $x \in A$ ist $(x,x) \in R$ $(x \sim x)$
symmetrisch : $\Leftrightarrow$ $\underbrace{(x,y) \in R}_{x \sim y} \Rightarrow \underbrace{(y,x) \in R}_{y \sim x}$
antisymmetrisch : $\Leftrightarrow$ $\underbrace{(x,y) \in R}_{x \sim y} \wedge \underbrace{(y,x) \in R}_{y \sim x} \Rightarrow x = y$
transitiv : $\Leftrightarrow$ $\underbrace{(x,y) \in R}_{x \sim y} \wedge \underbrace{(y,z) \in R}_{y \sim z} \Rightarrow \underbrace{(x,z) \in R}_{x \sim z}$
konnex : $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in A$ gilt $\underbrace{(x,y) \in R}_{x \sim y}$ oder $\underbrace{(y,x) \in R}_{y \sim x}$

Definition 2.2 Eine Relation R auf A heißt
- Äquivalenzrelation, falls R reflexiv, symmetrisch & transitiv ist
- Halbordnung, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist
- Ordnung, falls R eine Halbordnung ist und zusätzlich konnex.

Beispiele 2.3.

1) Die Relation "=" auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation

2) Sei A die Menge der Menschen, dann definiert „verwandt sein" eine Äquivalenzrelation

3) Sei A die Menge aller Menschen, dann definiert "verheiratet sein" eine Relation, die symmetrisch, aber nicht reflexiv und nicht konnex ist.

4) "$\geq$" definiert eine Ordnung auf $\mathbb{N}$

5) Sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dann definieren wir die Relation

$(x,y) \sim (z,w) \iff x \geq z$ und $y \geq w$.

Dies ist eine Halbordnung, aber keine Ordnung

Definition 2.4 (Äquivalenzklassen)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A.

Für $a \in A$ heißt die Teilmenge $[a] := a/\sim := \{b \in A \mid b \sim a\}$

Äquivalenzklasse von a (bzgl. $\sim$)

Ein Element $a' \in [a]$ heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[a]$.

Lemma + Definition 2.5

Sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Auf A definieren wir die Relation $\sim$ durch

$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ nennen wir die Menge der ganzen Zahlen und bezeichnen sie mit $\mathbb{Z}$

Beweis:

(i) $\sim$ ist reflexiv ; Sei $(n,m) \in A$, dann ist $n+m = m+n$, also ist $(n,m) \sim (n,m)$

(ii) $\sim$ ist symmetrisch ; Sei $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$
$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Dann gilt per Definition von $\sim$:

$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, also auch $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.

Dies heißt aber per. Def. von $\sim$, dass $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$

(iii) $\sim$ ist transitiv ; Sei $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ &

$(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$

Dann ist $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ und $m_1 + k_2 = m_2 + k_1$

Ist $m_2 \geq m_1$, dann ist $n_2 \geq n_1$ & $k_2 \geq k_1$

$$\underbrace{m_2 - m_1}_{\in \mathbb{N}} = n_2 - n_1 = k_2 - k_1 \Rightarrow n_1 + k_2 = n_2 + k_1 \Rightarrow (n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$$

Analog für $m_1 \geq m_2$.

Lemma 2.6.

Die Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" auf $\mathbb{N}$ induzieren Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}$, die wir ebenfalls mit "+" & "$\cdot$" bezeichnen.

$[(n_1, n_2)] + [(m_1, m_2)] := [(n_1 + m_1, n_2 + m_2)]$

$[(n_1, n_2)] \cdot [(m_1, m_2)] := [(n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2, n_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot n_2)]$

$$\left(\underbrace{[(1,4)]}_{-3} \cdot \underbrace{[(6,1)]}_{5} = [(\underbrace{6+4}_{10}, \underbrace{1+24}_{25})] \right)$$

Beweis:

Die oben definierten Verknüpfungen zwischen Äquivalenzklassen sind repräsentantenweise definiert.

(d.h. die Verknüpfung der Äquivalenzklassen sind def. über Verknüpfungen zwischen Elementen in dieser Klasse.)

Wir müssen zunächst zeigen, dass die Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert sind. Dies bedeutet konkret:

Sei $(n_1, n_2) \sim (n_1', n_2')$, also $[(n_1, n_2)] = [(n_1', n_2')]$

& $(m_1, m_2) \sim (m_1', m_2')$, also $[(m_1, m_2)] = [(m_1', m_2')]$

Dann müssen wir für die Wohldefiniertheit der Addition nachrechnen, dass

$[(n_1 + m_1, n_2 + m_2)] = [(n_1' + m_1', n_2' + m_2')]$

$\overset{\text{Def.} \sim}{\Leftrightarrow} (n_1 + m_1) + (n_2' + m_2') = (n_2 + m_2) + (n_1' + m_1')$

Bew: Wegen $(n_1, n_2) \sim (n_1', n_2')$ ist $n_1 + n_2' = n_2 + n_1'$

$(m_1, m_2) \sim (m_1', m_2')$ ist $m_1 + m_2' = m_2 + m_1'$

$\Rightarrow (n_1 + n_2') + (m_1 + m_2') = (n_2 + n_1') + (m_2 + m_1')$ $(\square)$

Für die Wohldefiniertheit der Multiplikation ist z.z.

$[(n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2, n_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot n_2)]$

$= [(n_1' \cdot m_1' + n_2' \cdot m_2', n_1' \cdot m_2' + m_1' \cdot n_2')]$

$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2) + (n_1' \cdot m_2' + m_1' \cdot n_2')$ L.S.

$= (n_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot n_2) + (n_1' \cdot m_1' + n_2' \cdot m_2')$

Bew: Wegen $(n_1, n_2) \sim (n_1', n_2')$ & $(m_1, m_2) \sim (m_1', m_2')$ R.S.

ist $n_1 + n_2' = n_2 + n_1'$ & $m_1 + m_2' = m_2 + m_1'$

$\Rightarrow \underset{\text{R.S}}{\underbrace{(n_1 + n_2') \cdot (m_1 + m_2')}} = \underset{\text{L.S}}{\underbrace{(n_2 + n_1') \cdot (m_2 + m_1')}}$ $\square$

Analog zu $\mathbb{N}$ gilt auch in $\mathbb{Z}$ das Assoziativgesetz Assoziativ-, Kommutativ- & Distributivgesetz bzgl. "+" & "·"

Wir zeigen exemplarisch das Assoziativgesetz

Müssen zeigen:

$(*) = [(n_1, n_2)] + \left([(m_1, m_2)] + [(k_1, k_2)]\right)$

$= \left([(n_1, n_2)] + [(m_1, m_2)]\right) + [(k_1, k_2)] = (*_2)$

Bew: $[(n_1, n_2)] + [(m_1 + k_1, m_2 + k_2)]$

$(*) = [(n_1 + (m_1 + k_1), n_2 + (m_2 + k_2))] \underset{\text{in } \mathbb{N}}{\overset{\text{Asso}}{=}} [((n_1 + m_1) + k_1, (n_2 + m_2) + k_2)]$

$\overset{\text{Def} \sim}{\ldots} = (*_2)$

Bemerkung 2.7

Üblicherweise schreiben wir:

$[(0,0)] = 0$, $[(p,0)] = p$, $[(0,p)] = -p$

Allgemeiner schreiben wir für die Klasse $[(n_1, n_2)] \in \mathbb{Z}$

$$[(n_1,n_2)] = \begin{cases} n_1 - n_2 , & \text{falls } n_1 > n_2 \\ 0 , & \text{falls } n_1 = n_2 \\ -(n_2 - n_1) = n_1 - n_2 , & \text{falls } n_2 > n_1 \end{cases}$$

Auch die Ordnung $\leq$ setzt sich auf $\mathbb{Z}$ fort durch $p \geq 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und $-p < 0$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Wir haben $a \leq b \iff b - a \geq 0$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

Ferner folgt aus $a \leq b$ auch $m \cdot a \leq m \cdot b$ $\forall m \in \mathbb{N}$

Auch die Nullteilerfreiheit (d.h. aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ $\vee$ $b = 0$) setzt sich von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ fort.

Wollen wir eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ lösen, so existiert i.A. keine ganzzahlige Lösung.

Auch hier können wir den Zahlbereich geeignet vergrößern. Lösungen der obigen Gleichung sind rationale Zahlen.

Lemma 2.8.

Sei $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Die Relation $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\iff x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$ definiert eine Äquivalenzrelation auf A.

Definition 2.9

Die Äquivalenzklassen bzgl. der in 2.8 definierten Äquivalenzrelation $\sim$ heißen rationale Zahlen.

Die Menge der rationalen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}$

Beweis von 2.8.

Reflexivität: Wegen $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ ist $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$

Transitivität: Es gelte $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$

Dann ist $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$ & $y_1 \cdot z_2 = y_2 \cdot z_1$ (Def von $\sim$)

$\Rightarrow (x_1 \cdot y_2)(y_1 \cdot z_2) = (y_1 \cdot x_2) \cdot (z_1 \cdot y_2)$ $(*)$

1. Fall: Ist $y_1 = 0$, so muss schon $x_1 = 0$ sein, da $y_2 \in \mathbb{Z}^*$ und $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist. Damit folgt nun aber, dass $z_1 = 0$ ist

$$\Rightarrow (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1}, x_2) \sim (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{z_1}, z_2)$$

2. Fall: $y_1 \neq 0$ so folgt mit $(*)$

$$\underbrace{\underbrace{y_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{y_2}_{\neq 0}}_{\neq 0} \cdot (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) = 0$$

$\Rightarrow x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 = 0$ wegen d. Nullteilerfreiheit

$\Rightarrow x_1 \cdot z_2 = x_2 \cdot z_1 \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$

Symmetrie: Es gelte $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$

$\Rightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1 \Rightarrow y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$

d.h. $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$ $\square$

Ziel: 25.04.18

- Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$ def. (Addition + Multiplikation)
- "Teilen durch 0"

Lemma 2.10

Auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lässt sich bzgl.

$[(x_1, x_2)] + [(y_1, y_2)] := [(x_1 y_2 + y_1 x_2, x_2 y_2)]$ &

$[(x_1, x_2)] \cdot [(y_1, y_2)] := [(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)]$

eine wohldefinierte Addition & Multiplikation definieren.

Beweis:

Wir müssen die Wohldefiniertheit zeigen. Wir zeigen, dass die Verknüpfungen nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen. Zudem muss gelten, dass das Ergebnis nochmal ein Element in $\mathbb{Q}$ ist. Dies folgt aus der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$. ($x_2 \neq 0, y_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 \cdot y_2 \neq 0$)

Nun zur Unabhängigkeit der Wahl der Repräsentanten:

Seien $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in [(x_1, x_2)]$ &

$(y_1, y_2), (y_1', y_2') \in [(y_1, y_2)]$ zwei Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[(x_1, x_2)]$ bzw. $[(y_1, y_2)]$

z.z. $(x_1 y_2 + x_2 y_1, x_2 y_2) \sim (x_1' y_2' + x_2' y_1', x_2' y_2')$ d.h.

$(x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_2' y_2') = (x_2 y_2)(x_1' y_2' + x_2' y_1')$

Wegen: $$\left.\begin{aligned} (x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') &\Leftrightarrow x_1 x_2' = x_2 x_1' \\ (y_1, y_2) \sim (y_1', y_2') &\Leftrightarrow y_1 y_2' = y_2 y_1' \end{aligned}\right\} (*)$$

Mit den Rechenregeln für die Addition & Multiplikation in $\mathbb{Z}$ folgt nun:

$$\begin{aligned}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot (x_2' y_2') &\underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Distributiv}}{=}} x_1 y_2 \cdot x_2' y_2' + y_1 x_2 \cdot x_2' y_2' \\ &\underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Komm.}}{=}} x_1 x_2' y_2 y_2' + y_1 y_2' x_2 x_2' \\ &\overset{(*)}{=} x_1' x_2 y_2 y_2' + y_1' y_2 x_2 x_2'\end{aligned}$$

$$\underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Komm.}}{=}} x_2y_2 \cdot x_1'y_2' + x_2y_2 \cdot y_1' \cdot x_2'$$

$$\underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Dist.}}{=}} (x_2y_2)(x_1'y_2' + y_1' \cdot x_2')$$

Zur Multiplikation in $\mathbb{Q}$:

z.z. $(x_1 y_1, x_2 y_2) \sim (x_1' y_1', x_2' y_2')$ d.h.

$x_1 y_1 x_2' y_2' = x_1' y_1' x_2 y_2$

Aber:

$$x_1 y_1 x_2' y_2' \overset{\text{Komm.}}{=} x_1 x_2' y_1 y_2' \overset{(*)}{=} x_1' x_2 y_1' y_2 \overset{\text{Komm.}}{=} x_1' y_1' x_2 y_2 \quad \blacksquare$$

($[(x_1, x_2)] + [(y_1, y_2)] := [(x_1 + y_1, x_2 + y_2)]$ ist nicht wohldefiniert (Bsp. Übung))

Beispiel 2.11

$[(4,3)] + [(9,12)] = [(4 \cdot 12 + 3 \cdot 9, 3 \cdot 12)] = [(75,36)]$

$[(8,6)] + [(3,4)] = [(8 \cdot 4 + 6 \cdot 3, 6 \cdot 4)] = [(50,24)]$

$(75,36) \sim (50,24)$, denn $75 \cdot 24 = 1800 = 50 \cdot 36$

Ein weiterer Repräsentant der Klasse $[(75,36)]$ ist $(25,12)$ "minimal"

Lemma 2.12

In $\mathbb{Q}$ gelten die folgenden Rechengesetze für die Addition & Multiplikation:

(A1) 1) „Es gibt eine 0" (= neutrales Element der Addition)

$[(x_1, x_2)] + [(0,1)] = [(x_1, x_2)]$ $\quad ((0,m) \in [0,1], m \in \mathbb{Z}^*)$

(A2) 2) „Zu jeder Zahl a gibt es $-a$" (= inverses Element d. Add.)

$[(x_1, x_2)] + [(-x_1, x_2)] = [(0,1)]$

(M1) 3) „Es gibt eine 1" (= neutrales Element der Multiplikation)

$[(x_1 x_2)] \cdot [(m,m)] = [(x_1, x_2)]$; $[(1,1)] = [(x_1, x_2)]$

(M2) 4) „Zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es $\frac{1}{a}$ (=inverses Element d. Multiplikation)

Ist $x_1 \neq 0$, dann $[(x_1,x_2)][(x_2,x_1)] = [(m,m)] = [(1,1)]$

(A3),(M3) 5) Für Addition & Multiplikation gilt das Assoziativgesetz

(A4)(M4) 6) Addition & Multiplikation sind kommutativ

(D) 7) Es gilt das Distributivgesetz

$[(x_1,x_2)] \cdot ([(y_1,y_2)] + [(z_1,z_2)]) = [(x_1,x_2)][(y_1,y_2)] + [(x_1,x_2)] \cdot [(z_1,z_2)]$

8) Nullteilerfreiheit

$[(x_1,x_2)] \cdot [(y_1,y_2)] = [(0,1)] \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $y_1 = 0$

Beweis: (7) & (8)

Beim Beweis der obigen Aussagen ist darauf zu achten, dass es sich um Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen, also Mengen handelt.

Da wir jedoch schon die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen überprüft haben, können wir uns auf das Rechnen mit Repräsentanten der Klassen beschränken.

Die Strategie ist das Rechnen in $\mathbb{Q}$ auf Rechnungen in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ zurückzuführen.

zu 7)

$$\begin{aligned}
[(x_1,x_2)] \cdot ([(y_1,y_2)] + [(z_1,z_2)]) &\overset{\text{Def}+}{=} [(x_1,x_2)] \cdot [(y_1 z_2 + y_2 z_1, y_2 z_2)] \\
&= [(x_1(y_1 z_2 + y_2 z_1), x_2 y_2 z_2)] \\
&\underset{\text{in } \mathbb{Z}}{\overset{\text{Distr.}}{=}} [(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1, x_2 y_2 z_2)] \\
&\underset{\text{wahl}}{\overset{\text{Reprä.}}{=}} [(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1) \cdot x_2, x_2 y_2 z_2 x_2)] \\
&\overset{\text{Distr.}}{=} [(x_1 y_1 z_2 x_2 + x_1 y_2 z_1 x_2, x_2 y_2 z_2 x_2)] \\
&\overset{\text{Def}+}{=} [(x_1 y_1, x_2 y_2)] + [(x_1 z_1, x_2 z_2)] \\
&\overset{\text{Def}\cdot}{=} [(x_1,x_2)][(y_1,y_2)] + [(x_1,x_2)] \cdot [(z_1,z_2)]
\end{aligned}$$

zu 8) "$\Leftarrow$" Ist $x_1 = 0$ oder $y_1 = 0$, dann ist

$[(x_1, x_2)] \cdot [(y_1, y_2)] = [(0, x_2 \cdot y_2)] = [(0,1)]$

"$\Rightarrow$" Ist $[(x_1, x_2)] \cdot [(y_1, y_2)] = [(0,1)]$, dann $x_1 \cdot y_1 = 0$

$\overset{\text{Nullteilerfreiheit}}{\underset{\text{in } \mathbb{Z}}{\Longrightarrow}}$ $x_1 = 0$ oder $y_1 = 0$

Bemerkung 2.13

1) Die ganzen Zahlen lassen sich in die rationalen Zahlen einbetten. Wir finden eine injektive Abbildung:

$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mit

$$\left.\begin{aligned} \varphi(m+n) &= \varphi(m) + \varphi(n) \\ \varphi(m \cdot n) &= \varphi(m) \cdot \varphi(n) \end{aligned}\right\} \text{(Ringhomomorphismus)}$$

Die Abbildung $\varphi(n) := [(n,1)]$ tut das Gewünschte.

2) Zur Erinnerung: Man findet auch bijektive Abbildungen:

$\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\beta: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

(Stichwort: Cantor's Diagonalargument)

Man sagt auch, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind (als Mengen).

3) Wir schreiben im Folgenden die rationalen Zahlen $r = [(x_1, x_2)] \in \mathbb{Q}$ wie gewohnt als Bruch.

Hierzu wählen wir einen Repräsentanten $(z, n) \in [(x_1, x_2)]$ von r und schreiben $r = \frac{z}{n}$, wobei z der Zähler und n der Nenner ist.

Das Symbol $\frac{z}{n}$ ist dabei nur eine Schreibweise für die komplette Äquivalenzklasse $[(z,n)]$!

Das multiplikative Inverse von $r \neq 0$ bezeichnet man auch mit r^{-1}. Lässt sich r als $\frac{z}{1}$ schreiben, so ist $r \in \mathbb{Z}$ & man lässt den Nenner beim Schreiben meist weg.

Somit gilt für $r \in \mathbb{Q}$ $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$; für $r \neq 0$ ist
$r \cdot r^{-1} = \frac{r}{r} = 1$

- $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Z}$, $m^{-1} = \frac{1}{m}$

Hierbei sei betont, dass die beiden Schreibweisen m^{-1} & $\frac{1}{m}$ auf unterschiedlichen Vorstellungen beruhen.
m^{-1} ist das multiplikative Inverse
$\frac{1}{m}$ drückt hingegen aus, dass man den m-ten Teil einer Ganzen Zahl betrachtet.

Proposition 2.14
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$. Dann hat die Gleichung $ax = b$ die eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$

Beweis:
Setze $x := a^{-1}b$. Dann ist $ax = aa^{-1}b = 1 \cdot b = b$
Also ist $x = a^{-1}b$ eine Lösung.
Zur Eindeutigkeit: Sei x' eine weitere Lösung mit $ax' = b$
Dann ist $\underbrace{a^{-1}(ax')}_{=(a^{-1}a)x' = 1x' = x'} = a^{-1}b = x \Rightarrow x' = x$
$\blacksquare$

Bemerkung 2.15 "Das Teilen durch 0"
Bei der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ fällt die Unsymmetrie bei der Wahl der beteiligten Paare auf.
Ein Element in $\mathbb{Q}$ wird repräsentiert durch (x_1, x_2) mit $x_1 \in \mathbb{Z}$ aber $x_2 \in \mathbb{Z}^*$.
Was passiert, wenn wir $x_2 = 0$ zulassen ?
Die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ beginnt in Lemma 2.8 mit der Konstruktion einer passenden Äquivalenzrelation.
Durch $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$ können wir auch eine Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren.

Diese ist dann immer noch reflexiv und symmetrisch, allerdings scheitert es an der Transitivität:

$(1,0) \sim (0,0) \sim (0,1)$

Aber: $(1,0) \nsim (0,1)$

Wenn wir jedoch keine Äquivalenzrelation haben, können wir keine passenden Rechenoperation definieren. Diese waren repräsentantenweise definiert.