Beispiel 4.11 (Ein Briefmarkenproblem)

- Wir möchten 3,90 € an Briefmarken auf einen Brief kleben.
- Wir haben hierzu nur Briefmarken für 45 Cent & 55 Cent zur Verfügung.
- Können wir nur mit solchen Briefmarken 3,90 € bekommen?

Wir suchen also eine positive Lösung $(x,y>0)$ der Gleichung
$x \cdot 55 + y \cdot 45 = 390$.

Wir lösen $x \cdot 55 + y \cdot 45 = 390$ für $x,y \in \mathbb{Z}$ 30.05.18

Da $ggT(55,45) = 5$, also ein Teiler von 390 ist diese Gleichung lösbar.

Der erw. Euklidische Alg. liefert:

$5 = -4 \cdot 55 + 5 \cdot 45$

$\Rightarrow x_0 = -4 \cdot \frac{390}{5} = -312$

$y_0 = 5 \cdot \frac{390}{5} = 390$

Dies löst noch nicht das Briefmarkenproblem, da $x<0$

Da $\frac{45}{5} = 9$ und $\frac{55}{5} = 11$ sind alle weiteren Lösungen von der Form:

$x = -312 + 9 \cdot k \quad , \quad y = 390 - 11k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Die Bedingung $x,y>0$ liefert nun

$9 \cdot k > 312$ und $11k \leq 390$

$\Rightarrow$ Haben eindeutige Lösung für $k = 35$

D.h. wir brauchen $\left.\begin{array}{r} -312+35\cdot 9 = 3 \\ 390-35\cdot 11 = 5 \end{array}\right\}$ Briefmarken à 55 Cent / 45 Cent

Die Kalenderformel

In diesem Abschnitt möchten wir eine Formel zur Bestimmung des Wochentags zu einem gegebenen Datum herleiten.

Dies ist eine Anwendung des Rechnens modulo 7.

Jahr: Zeit, die die Erde braucht, um einmal um die Sonne zu kreisen

Tag: Zeit, die die Erde benötigt, um sich einmal um die eigene Achse zu drehen.

1 Jahr $\approx$ 365,2422 Tage.

Aus diesem Grund hat Julius Ceasar ca. 46 v. Chr. das Schaltjahr eingeführt, als er den Julianischen Kalender eingeführt hat. (Schaltjahr im Julianischen Kalender → alle 4 Jahre hat der Februar 29 Tage)

$\Rightarrow$ Das Julianische Jahr hat also im Schnitt 365,25 Tage und ist somit ca. 0,0078 Tage zu lang.

Um dies zu korrigieren hat Papst Gregor IV 1582 den Gregorianischen Kalender eingeführt.

Nach dem Gregorianischen Kalender ist ein Jahr j ein Schaltjahr, falls $j \equiv 0 \mod 4$ & $j \not\equiv 0 \mod 100$ außer $j \equiv 0 \mod 400$.

⤳ Das Gregorianische Jahr hat im Schnitt 365,2425 Tage.

Um die Tage, die durch Verwendung des Julianischen Kalenders zu viel gezählt wurden zu kompensieren, ließ Gregor IV 10 Tage streichen.

Auf den 04.10 1582 folgte der 15.10.1582

⌈ z.B. in Russland wurde erst 1918 auf den Gregorianischen Kalender umgestellt, dort wurden 13 Tage gestrichen. ⌋

Um die Kalenderformel herzuleiten, geben wir zunächst jedem Wochentag eine Nummer

So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
0	1	2	3	4	5	6

Wir betrachten das Jahr "0" als Ausgangsjahr.
(Obwohl es dies nach christlicher Zeitrechnung nicht gegeben hat.)

Sei a der Wochentag des 01.03.0000 (wieso wir den 01.03 und nicht den 01.01. betrachten wird später klar.)

Wir berechnen zunächst a.

Wegen $365 = 7 \cdot 52 + 1$ bzw. $366 = 7 \cdot 52 + 2$ ist
$365 \equiv 1 \mod 7$ bzw. $366 \equiv 2 \mod 7$.

D.h. wenn der 01.03.j auf einem Wochentag a' fällt, so gilt:

$$a' \equiv a + j + S \mod 7$$, wobei $S = \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{400} \right\rfloor$

die Anzahl der Schaltjahre zwischen dem Jahr 0000 und dem Jahr j ist.

Definieren wir:

$$g(j) = j + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{400} \right\rfloor \mod 7$$

so gilt für den Wochentag a' des 01.03.j

$$a' \equiv a + g(j) \mod 7$$

Der 01.03.2018 war ein Donnerstag.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Do}}}{4} \equiv a + \underbrace{2018 + \left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2018}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{400} \right\rfloor}_{= 2507 \,=\, 358 \cdot 7 + 1} \mod 7$$

$4 \equiv a + 1 \mod 7$

$\Rightarrow 3 \equiv a \mod 7$

$\Rightarrow$ Der Wochentag des 01.03.0000 war ein Mittwoch.

Nun zu den anderen Daten als dem 01.03.j

Der Einfachheithalber fangen wir im März an zu zählen, da es einfacher ist, wenn der 29. Februar auf den letzten Tag im vorherigen Jahr fällt.

Für einen Monat m sei $f(m)$ dadurch definiert, dass $f(m)+1$ die Nummer des Wochentags des 01.m.0000 ist. Wir haben folgende Tabelle:

Monat	Nummer	Wochentag	$f(m)$
März	$m=1$	3	2
April	$m=2$	$6 \equiv 3+31 \mod 7$	5
Mai	3	$1 \equiv 3+31+30 \mod 7$	0
Juni	4	4	3
Juli	5	6	5
August	6	2	1
September	7	5	4
Oktober	8	0	6
November	9	3	2
Dezember	10	5	4
Januar	11	1	0
Februar	12	4	3

Merkspruch: "My uncle Charles has eaten a cold supper. He eats nothing hot."

Die Anzahl der Buchstaben im n-ten Wort ist kongruent zu $f(m)$ mod 7.

Satz 4.12

Der Tag mit Datum $t.m.j$ ist der Wochentag mit Nr

$t + f(m) + g(j)$ mod 7. (falls $t.m.j \geq 15.10.1582$)

bzw.

$10 + t + f(m) + g(j)$ mod 7 (falls $t.m.j \leq 04.10.1582$

Beispiele 4.13

1) Wir möchten den Wochentag des 23.05.2018

$t = 23$, $m = 5 - 2 = 3$, $j = 2018$

$f(m) = 0$, $g(j) = 1$ mod 7

$$t + f(m) + g(j) \equiv 23 + 0 + 1 \mod 7$$
$$\equiv 3 \mod 7$$

$\Rightarrow$ Der 23.05.2018 war ein Mittwoch.

2) Wir bestimmen den Wochentag des 01.01.2019

$t = 1$, $f(m) = 0$ $j = 2018$

$\Rightarrow g(j) \equiv 1$ mod 7

da in unserer Rechnung Januar & Februar zum Vorjahr gezählt werden.

$t + f(m) + g(j) \equiv 1 + 0 + 1$ mod 7

$\Rightarrow$ Der 01.01.2019 ist ein Dienstag

3) Kolumbus "entdeckte" am 12.10.1492 Amerika.

$t = 12$, $m = 8 \Rightarrow f(m) = 6$ $\quad g(1492) \equiv 6 \mod 7$

$\rightsquigarrow t + f(m) + g(j) \equiv 12 + 6 + 6 \equiv 3 \mod 7$

ein Mittwoch.

1492 war der Gregorianische Kalender aber noch nicht eingeführt

$\Rightarrow$ Wir haben die 10 Tage vergessen dazuzuzählen, die bei seiner Einführung gestrichen wurden. Die Nummer des Wochentags an dem Kolumbus Amerika erreicht hat, ist also in Wirklichkeit:

$10 + t + f(m) + g(j) \equiv 10 + 12 + 6 + 6 \equiv 6 \mod 7$

$\Rightarrow$ der 12.10.1492 war ein Samstag

Lemma 4.14

Jedes Jahr besitzt mindestens einen Freitag den 13.

Beweis:

Da Januar und Februar (bei unserer Rechnung) zum vorherigen Jahr gezählt werden, lassen wir diese beiden Monate zunächst außen vor.

Wir betrachten für $t = 13$ den Monat m im Jahr j für $m \in \{1, \dots, 10\}$ also zwischen März und Dezember.

Da $f(m)$ alle Werte zwischen 0 und 6 annimmt, muss in mindestens einem Monat der 13. auf einen Freitag fallen.

$5 \equiv 13 + f(m) + g(j)$

Prüfziffern & die ISBN-Nummer

Anfang 2007 wurde die neue ISBN (ISBN-13) Nummer eingeführt. Dies ist eine 13-stellige Nummer, die zur Kennzeichnung von Büchern oder anderen Veröffentlichungen dient.

Die ISBN-13 Nummer hat die bis 2007 gültige ISBN-10 Nummer abgelöst, da die gültigen ISBN-10 Nummern im englischsprachigen Raum knapp wurden.

Die neue ISBN-13 Nummer besteht aus 5 Bestandteilen, (A) - (E).

Die Länge von (A) - (D) beträgt genau 12 Ziffern.

(A) = 3-stellige Ländernummer, ähnlich der EAN (= european article number)

(B) = Gruppennummer für geografische oder Sprach- oder ähnliche Gruppen z.B. 0, 1 engl. sprachiger Raum (USA England Simbabwe)
2 franz. sprachiger Raum

(C) = Verlagsnummer (2-7 Stellen)

(D) = Band oder Titelnummer (2-7 Stellen)

(E) = Prüfziffer = Einstellige Nummer, die die formale Richtigkeit der ISBN garantiert.

Eine 13-stellige Nummer ($x_1 \ldots x_{13}$) ist eine gültige ISBN-13 Nummer, falls

$x_1 + 3x_2 + x_3 + \ldots + 3x_{12} + x_{13} \equiv 0 \mod 10$ erfüllt ist.

(Insb. lässt sich eine gültige Prüfziffer x_{13} zu einer beliebigen 12-stelligen Nummer basteln.)

ISBN-13 Nummern sind häufig stabil gegenüber Übertragungsfehlern.