Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Ziel heute: Die Dimension ist wohldefiniert.

- unverkürzbare Erzeugendensysteme
- unverlängerbare Systeme von linear unabhängigen Vektoren
- Austauschsatz
- lineare Abbildungen, Homomorphismen
- Klassifikation endlich-dimensionaler K-Vektorräume

In der letzten Vorlesung hatten wir die Dimension eines Vektorraums V mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ als

$$\dim V = n$$

definiert. Diese Definition ist problematisch, da Vektorräume viele verschiedene Basen haben. Wir müssen zeigen, dass je zwei verschiedene Basen aus gleich vielen Vektoren bestehen.

Definition (Erinnerung). Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren.

1. $v_1, \ldots, v_n$ **erzeugen** V, wenn jeder Vektor $v \in V$ eine Darstellung
$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ besitzt.
2. $v_1, \ldots, v_n$ sind **linear unabhängig**, wenn
$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0 \text{ gilt.}$$
3. $v_1, \ldots, v_n$ ist eine **Basis** von V, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden.

Bemerkung. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, dann hat jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_i \in K$$
als Linearkombination.

Beweis. Existenz ist die erste Bedingung, Eindeutigkeit die zweite.

Satz. *Sei V ein K–Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren. Äquivalent sind:*

1. *$v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.*
2. *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein unverlängerbares System von linear unabhängigen Vektoren.*
3. *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V.*
4. *Jeder Vektor $v \in V$ hat genau eine Darstellung*

   $$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_i \in K$$

   als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 4. gilt nach der vorangegangenen Bemerkung.
4. $\Rightarrow$ 2. und 4. $\Rightarrow$ 3. sind jeweils klar.
2. $\wedge$ 3. $\Rightarrow$ 1. gilt nach der Definition einer Basis.
Es bleibt, 2. $\Leftrightarrow$ 3. einzusehen.

2. $\Rightarrow$ 3.: Sei $v_1, \dots, v_n$ ein unverlängerbares System von linear unabhängigen Vektoren. Mit jedem weiteren Vektor $w \in V$ erhalten wir also ein System von linear abhängigen Vektoren, also:

$$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in K : \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = 0,$$

wobei wenigstens ein $\lambda_i \neq 0$. Es ist $\lambda_{n+1} \neq 0$, da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind. Da K ein Körper ist, gilt $\frac{1}{\lambda_{n+1}} \in K$.
Es folgt:

$$w = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}})v_1 + \dots + (-\frac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}}) \cdot v_n.$$

Dies gilt für beliebige $w \in V$, d.h. $v_1, \dots, v_n$ erzeugen V.
$v_1, \dots, v_n$ ist unverkürzbar, das heißt nach Weglassen eines der Vektoren haben wir kein Erzeugendensystem mehr. Wenn wir zum Beispiel v_n weglassen und $v_1, \dots, v_{n-1}$ noch ein Erzeugendensystem wäre, gäbe es eine Darstellung

$$v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1},$$

d.h. $v_1, \dots, v_n$ wären linear abhängig. Dies widerspricht der Voraussetzung.

3. $\Rightarrow$ 2.: Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. In der Tat: Wäre

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = 0$$

ein nichttriviale Relation, etwa mit $\lambda_n \neq 0$, dann:

$$v_n = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_n}\right) v_1 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) v_{n-1}.$$

Doch dann wären schon $v_1, \ldots, v_{n-1}$ erzeugend, im Widerspruch zur Voraussetzung: $v_1, \ldots, v_n$ ließe sich zu dem Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_{n-1}$ verkürzen. $\square$

Ende Teil 1

Beispiel. Das Erzeugendensystem

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von Vektoren des $\mathbb{R}^2$ ist verkürzbar. Wir können sogar jeden beliebigen der drei Vektoren weglassen und erhalten immer noch ein System, das ganz $\mathbb{R}^2$ erzeugt:

$$\mathrm{Spann}(v_1, v_2) = \mathrm{Spann}(v_1, v_3) = \mathrm{Spann}(v_2, v_3) = \mathbb{R}^2.$$

Bei $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ können wir allerdings w_1 nicht weglassen, da w_2 und w_3 nur $\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\} \subsetneq \mathbb{R}^2$ erzeugen.

Austauschlemma

Lemma. *Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $w \in V$ ein weiterer Vektor mit $w \neq 0$. Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass wir nach Austausch von v_i mit w nach wie vor eine Basis haben. Ist etwa $i = 1$, was man durch Umnummerierung erreichen kann, dann ist also $w, v_2, \dots, v_{n-1}$ eine Basis von V.*

Beweis. w ist eine Linearkombination

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

für gewisse $\lambda_i \in K$, da $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem bilden.
Wenigstens ein $\lambda_i \in K$ ist $\neq 0$, da w nicht der Nullvektor ist.
Nach Umnummerieren können wir $\lambda_1 \neq 0$ annehmen.
Wir zeigen:

1. $w, v_2, \dots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem.
2. $w, v_2, \dots, v_n$ sind linear unabhängig.

Zunächst einmal gilt:

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w + (\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}) v_2 + \cdots + (\frac{-\lambda_n}{\lambda_1}) v_n,$$

da $\frac{1}{\lambda_1} \in K$ existiert.
Sei $u \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann existieren $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, so dass

$$u = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n,$$

da $v_1, \ldots, v_n$ ganz V erzeugen. Also:

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} w + (\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}) v_2 + \cdots + (\frac{-\lambda_n}{\lambda_1}) v_n \right) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + (\mu - \lambda_2 \frac{\mu_1}{\lambda_1}) v_2 + \cdots + (\mu_n - \lambda_n \frac{\mu_1}{\lambda_1}) v_n. \end{aligned}$$

D.h., $w, v_2, \ldots, v_n$ erzeugen V.

Zur linearen Unabhängigkeit: Angenommen,

$$0 = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n, \quad \mu_i \in K.$$

Einsetzen der Ausgangsgleichung für w liefert

$$0 = \mu_1\lambda_1 v_1 + (\mu_2 + \mu_1\lambda_2)v_2 + \cdots + (\mu_n + \mu_1\lambda_n)v_n.$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt

$$\mu_1\lambda_1 = 0, \quad \mu_2 + \mu_1\lambda_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mu_n + \mu_1\lambda_n = 0 \in K.$$

Nach Voraussetzung gilt $\lambda_1 \neq 0$.

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}\mu_1\lambda_1 = 0.$$

Einsetzen liefert: $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$. $\square$

Austauschsatz von Steinitz

Satz. *Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von linear unabhängigen Vektoren. Dann gilt $n \leq r$, und es existieren paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, r\}$, so dass wir nach Austausch von v_{i_k} mit w_k nach wie vor eine Basis haben.*
Gilt etwa $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$, was durch Umnummerierung von $v_1, \ldots, v_r$ erreicht werden kann, dann ist also

$$w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r$$

eine Basis von V.
Achtung: $n \leq r$ wird bewiesen und nicht vorausgesetzt.

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 1$ und der Satz für $n - 1$ schon gezeigt.
Dann gilt $r \geq n - 1$, und wir müssen nur noch den Fall $r = n - 1$ ausschließen. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir nach Umnummerierung von $v_1, \dots, v_r$ annehmen, dass

$$w_1, \dots, w_{n-1}, v_n, \dots, v_r$$

eine Basis ist, denn auch die Familie $w_1, \dots, w_{n-1}$ ist linear unabhängig. w_n hat eine Darstellung

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_r v_r \text{ mit } \lambda_i \in K.$$

Nicht alle Koeffizienten $\lambda_n, \dots, \lambda_r$ können 0 sein, denn sonst wären $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist einer der Koeffizienten $\lambda_n, \dots, \lambda_r$ nicht 0, und insbesondere ist $n \leq r$. Nach Umnummerieren von $v_n, \dots, v_r$ können wir annehmen, dass $\lambda_n \neq 0$. Nach dem Austauschlemma ist dann auch

$$w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r$$

eine Basis von V. $\square$

Ende Teil 2

Definition. Ein K-Vektorraum ist **endlich–dimensional**, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ gibt, die V erzeugen.

Bemerkung. Durch Verkürzen des Erzeugendensystems erhalten wir dann auch eine Basis von V, indem wir Elemente weglassen, solange bis die verbleibenden linear unabhängig sind. Es gibt also eine Basis der Gestalt

$$w_1, \dots, w_n,$$

wobei $w_k = v_{i_k}$ für geeignete Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

Korollar. *Je zwei Basen eines endlich–dimensionalen K-Vektorraums V haben gleich viele Elemente. Insbesondere ist*

$$\dim V := \begin{cases} n, & \textit{falls } \exists \textit{ Basis } v_1, \dots, v_n, \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

wohldefiniert. □

Basisergänzungssatz

Korollar. *Sei* $v_1, \dots, v_n$ *eine Familie linear unabhängiger Vektoren in einem endlich–dimensionalen Vektorraum* V *und sei* $r = \dim V (< \infty)$*. Dann kann man diese Familie zu einer Basis*

$$v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_r$$

von V *ergänzen.*

Beweis. Nach dem vorigen Korollar ist $n \leq r$. Ist $n < r$, so gibt es, ebenfalls wegen des Korollars, einen Vektor $w \in V \setminus \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Induktiv können wir dies fortführen, bis wir schließlich eine Basis erhalten. □

Bemerkung. Man kann die zusätzlichen Vektoren aus jedem (endlichen) Erzeugendensystem $w_1, \dots, w_m$ auswählen.

Korollar.

1. *Jeder endlich–dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis.*
2. *Ist V ein Vektorraum der Dimension $n = \dim V < \infty$, dann ist jede Familie von mehr als n Vektoren in V linear abhängig.*
3. *Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:* $\dim U \leq \dim V$. *Ist V endlich–dimensional und* $\dim U = \dim V$, *so folgt* $U = V$.

$\square$

Bemerkung. Für unendlich–dimensionale Vektorräume

$$U \subset V \text{ mit } \dim U = \dim V = \infty$$

kann man auf $U = V$ nicht schließen.
Zum Beispiel: $\mathbb{R}[t] \subsetneq C^0[a, b]$, da nicht jede stetige Funktion ein Polynom ist.

Ende Teil 3

Lineare Abbildungen und Vektorraumhomomorphismen

Definition. Es seien V, W zwei K-Vektorräume. Eine K-**lineare Abbildung** (oder **Vektorraumhomomorphismus**) von V nach W ist eine Abbildung

$$f\colon\ V \to W,$$

die Folgendes erfüllt:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$ und
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in K, \forall\, v \in V$.

Beispiel.

1. Sei $V = K^n$ und W ein weiterer K-Vektorraum. Zu einer Familie $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n\}$ von Vektoren aus W definiert

$$\varphi_{\mathcal{A}}\colon K^n \to W, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{l=1}^{n} x_i w_i$$

eine K-lineare Abbildung.

Beispiel.

2. Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen in K. Dann definiert A eine lineare Abbildung

$$f_A : K^n \to K^m, x \mapsto A \cdot x,$$

wobei $A \cdot x$ durch das Matrizenprodukt gegeben ist, also

$$f_A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

Merkregel. Die j-te Spalte $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ ist das Bild des j-ten Einheitsvektors $e_j \in K^n$.

Beispiel.

3. Die Translation um einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$,
$$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x + b$$
ist nicht linear, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung. Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Dann gilt: $f(0_V) = 0_W$ (kurz: $f(0) = 0$).

Beweis. Es gilt $0_V = 0_K \cdot 0_V$, also:
$$f(0_V) = f(0_K \cdot 0_V) = 0_K \cdot f(0_V) = 0_W.$$
$\square$

Monomorphismen, Epimorphismen und Isomorphismen

Definition. Einen injektiven Vektorraumhomomorphismus $f\colon V \to W$ nennen wir einfach **Monomorphismus**, einen surjektiven nennen wir **Epimorphismus**. Ein bijektiver Vektorraumhomomorphismus $f\colon V \to W$ heißt **Isomorphismus**; V und W heißen dann **isomorph** ($V \cong W$).

Bemerkung. Ist f ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Zu zeigen ist: f^{-1} ist K-linear. Sind $w_1, w_2 \in W$ und $v_j = f^{-1}(w_j), j = 1, 2$, also $w_j = f(v_j)$, dann gilt:

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2),$$

also:
$f^{-1}(w_1+w_2) = f^{-1}(f(v_1+v_2)) = v_1+v_2 = f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)$. $\square$

Klassifikation endlich–dimensionaler K-Vektorräume

Satz. *Sei V ein endlich–dimensionaler K-Vektorraum der Dimension* $\dim V = n$. *Dann ist* $V \cong K^n$.

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V, e_j \mapsto v_j$$

ein Isomorphismus. In der Tat:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda v_n = 0$$

gilt genau dann, wenn $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ gilt, da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Also $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(0) = \{0\}$.
Gilt nun $\varphi_{\mathcal{B}}(x) = \varphi_{\mathcal{B}}(y)$, so folgt wegen der Linearität $\varphi_{\mathcal{B}}(x - y) = 0$, und deshalb $x - y \in \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(0) = \{0\}$ und damit $x = y$. Dies zeigt, $\varphi_{\mathcal{B}}$ ist injektiv.
$\varphi_{\mathcal{B}}$ ist surjektiv, da $v_1, \ldots, v_n$ den Vektorraum V erzeugen. $\square$

Ende Teil 4