UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 19.11.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 3 12. November 2014

Aufgabe 1. Sei $x \geq -1$. Zeigen Sie, dass
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$
für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Wir definieren den folgenden Algorithmus:

(1) $x_1 = a$ und $x_2 = b$.
(2) Für $i \geq 2$ mit $x_i \neq 0$ bestimme man ein $c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und ein x_{i+1}, sodass
$$x_{i-1} = c_i x_i + x_{i+1}$$
und $0 \leq x_{i+1} < x_i$ gilt (Division mit Rest). Dies führt man fort bis schließlich $x_{n+1} = 0$ ist.

Zeigen Sie, dass der Algorithmus terminiert und x_n der größte gemeinsame Teiler von a und b ist.

Aufgabe 3. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Welche Implikationen bestehen zwischen den folgenden sechs Aussagen?

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ so dass $\forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(b) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0$ so dass $\forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(c) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0$ so dass $\forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(d) $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0$ so dass $\forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(e) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0$ so dass $\forall n \geq n_0$ ist $|a_n - a| < \varepsilon$,
(f) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0$ so dass $\exists n \geq n_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

Geben Sie Beispiele von Folgen an, die zeigen, dass weitere Implikationen nicht bestehen.

Aufgabe 4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$$
gegen a konvergiert.