UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 26.11.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4 19. November 2014

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Folgen

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}$$
$$b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$
$$c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

Zeigen Sie: Für $1 \leq n < 1000000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

Aufgabe 2. Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definiert durch

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

konvergiert gegen den goldenen Schnitt $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}\ .$$

Aufgabe 4. Auf $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.
(b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $[(1,1)]$ und $[(3,1)]$.

(c) Wir definieren eine Addition auf $M/\sim$ durch komponentenweise Addition, d.h.:

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)].$$

Zeigen Sie die Wohldefiniertheit, d.h. zeigen Sie, dass für $(a,b) \sim (a',b')$ und $(c,d) \sim (c',d')$ auch $(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d')$ gilt.

(d) Die Menge $M/\sim$ mit der so definierten Addition ist eine in der Mathematik wohlbekannte Menge. Welchen Namen hat diese Menge?