UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 3.12.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 5 26. November 2014

Aufgabe 1. Seien

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{R} \text{ und } M_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} \subset \mathbb{R}.$$

Welche dieser Mengen besitzt ein Supremum, welche ein Infimum? Geben Sie es jeweils an, wenn es existiert.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt, so dass jeder Punkt in dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ ein Häufungspunkt dieser Folge ist.
(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie:
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H$$

Aufgabe 4.

(a) Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.
(b) Unter Zuhilfenahme der Axiome $I-III$, A und AA wurde in der Vorlesung gezeigt, dass das Vollständigkeitsaxiom (VA) die Konvergenz von beschränkten monotonen Folgen $(KBMF)$ impliziert.
Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt, also $(KBMF) \Rightarrow (VA)$.
Bemerkung: Um Teilpunkte zu bekommen, ist es zulässig Teil (a) bei der Lösung von Teil (b) zu verwenden, ohne (a) gezeigt zu haben.