**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fachrichtung 6.1 - Mathematik**
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

## Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 17.12.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

**Blatt 7** 10. Dezember 2014

**Aufgabe 1.** (a) Sei $0 < q < 1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$. Es gelte

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist).

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge mit

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

**Aufgabe 2.** Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Folge positiver ganzer Zahlen und $b_0 \in \mathbb{Z}$. Wir definieren den Kettenbruch

$$[b_0; b_1, \dots, b_k] := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $([b_0; b_1, \dots, b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Kettenbruchentwicklung von $\alpha$ ist durch den folgenden Algorithmus definiert:

- $b_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ und $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - b_0}$.
- $b_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ und $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - b_k}$.
- Falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ bricht der Algorithmus ab und es ist $b_n = \alpha_n$

Zeigen Sie:

$$\alpha = \begin{cases} [b_0; b_1, \dots b_n] & \text{falls es ein } n \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } \alpha_n \in \mathbb{Z} \\ \lim_{k\to\infty}[b_0; b_1, \dots b_k] & \text{falls es kein } n \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } \alpha_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(c) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schließlich periodische Folge positiver ganzer Zahlen, d.h. es existieren $n_0, k \in \mathbb{N}$ mit $b_{j+k} = b_j$ ist für alle $j \geq n_0$. Zeigen Sie, dass $b = \lim_{k\to\infty}[b_0; b_1, b_2, \dots, b_k]$ die Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

(d) Bestimmen Sie die Näherung $\pi = 3.141592654... \approx \frac{22}{7}$ mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung.

**Aufgabe 3.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ beschränkt und monoton, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ beschränkt und konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ monoton gegen 0, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Hinweis für (b) und (c): Zeigen Sie zunächst, dass für $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n = A_k b_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} A_n (b_n - b_{n+1})$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+3}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n(n+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3-8n-16n^2}$

Hinweis zu (b): Stellen Sie die Partialsumme als Teleskopsumme dar.