UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 07.01.2015 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 8 17. Dezember 2014

Aufgabe 1. (a) Sei $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau 2 Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt, nämlich w und $-w$ mit

$$\mathrm{Re}(w) = \sqrt{\frac{|c| + \mathrm{Re}(c)}{2}}, \quad |\mathrm{Im}(w)| = \sqrt{\frac{|c| - \mathrm{Re}(c)}{2}}.$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von
  (i) $z^2 = 50i$
  (ii) $(3+i)z^2 + (-22+6i)z + (25-25i) = 0$

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$z_n = (1 - i\sqrt{7})^n \quad x_n = \mathrm{Re}(z_n)\ , \quad y_n = \mathrm{Im}(z_n).$$

Zeigen Sie, dass

$$x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = 2^{3n}\sqrt{7}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden reellen Potenzreihen. Untersuchen Sie auch die Konvergenz für den Fall, dass $|x| = R$ ist, wobei R den Konvergenzradius der jeweiligen Reihe bezeichnet.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n},$

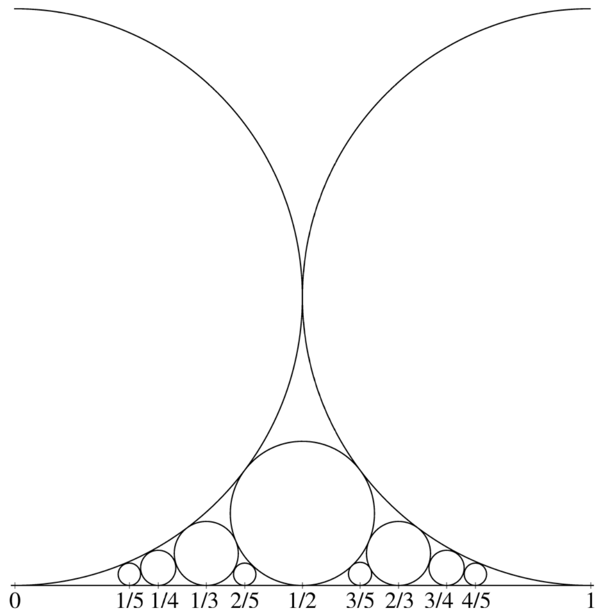
(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n^2},$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}.$

Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)**.** Bestimmen und zeichnen Sie für $r = \frac{1}{2}$, $r = 1$ und $r = 2$ jeweils die Menge:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < r \right\}.$$

Bonusaufgabe (Große und kleine Christbaumkugeln)
Der *Ford-Kreis* $C[p, q]$ zu einem Bruch $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist definiert als Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ und Radius $\frac{1}{2q^2}$.



(a) Zeigen Sie, dass je zwei Ford-Kreise $C[a, b]$ und $C[c, d]$ sich nicht überlappen. Zeigen Sie ferner, dass sich die beiden Ford-Kreise genau dann tangieren, wenn $|ad-bc| = 1$ ist. In diesem Fall nennen wir die beiden Ford-Kreise *benachbart.*

(b) Zeigen Sie: Seien $C[a, b]$ und $C[c, d]$ zwei benachbarte Ford-Kreise, dann ist $C[a + c, b + d]$ der eindeutig bestimmte Ford-Kreis, der zu beiden benachbart ist. Man nennt $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$ den *Median* der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und sei $\lim_{n\to\infty}[b_0; b_1, \dots, b_n]$ die Kettenbruchentwicklung von α. Die Brüche

$$\frac{p_k}{q_k} := [b_0; b_1, \dots, b_k]$$

heißen die *k-ten Näherungsbrüche* von α. Zeigen Sie, dass $C[p_k, q_k]$ und $C[p_{k+1}, q_{k+1}]$ benachbart sind.

(d) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und seien $\frac{p_k}{q_k}$ $(k \geq 0)$ die k-ten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von α. Zeigen Sie

(i) Falls k ungerade ist mit

$$\frac{p_k}{q_k} \geq \alpha \geq \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$$

dann ist

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k + lp_{k-1}}{q_k + lq_{k-1}}$$

wobei $l \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ maximal ist mit

$$\frac{p_k + lp_{k-1}}{q_k + lq_{k-1}} \leq \alpha$$

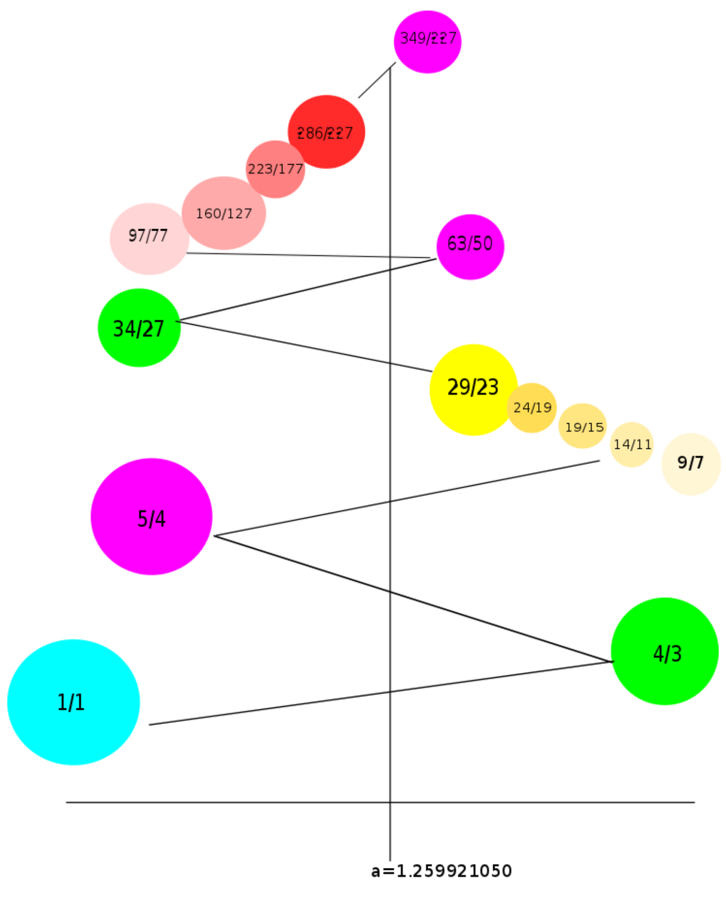
(ii) Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für den Fall, dass k gerade ist.

Beispiel zur Bonusaufgabe Wir betrachten $a = \sqrt[3]{2} \approx 1.259921050$. Die Folge der Näherungsbrüche ist durch

$$(\frac{p_k}{q_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{29}{23}, \frac{34}{27}, \frac{63}{50}, \frac{286}{227}, \frac{349}{277}, \frac{635}{504}, \dots)$$

gegeben. Wir berechnen die Näherungsbrüche durch sukzessives Medianbilden, ausgehend von $C[1,1]$ und $C[4,3]$ (siehe schematische Darstellung).

$$\frac{1}{1} \oplus \frac{4}{3} = \frac{5}{4} = \frac{p_2}{q_2}$$
$$\frac{5}{4} \oplus \frac{4}{3} = \frac{9}{7}$$
$$\frac{9}{7} \oplus \frac{4\cdot 5}{4\cdot 4} = \frac{29}{23} = \frac{p_3}{q_3}$$
$$\frac{29}{23} \oplus \frac{5}{4} = \frac{34}{27} = \frac{p_4}{q_4}$$
$$\dots$$



Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!!!