UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

Wintersemester 2014/15

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr abgegeben und bewertet.

Ferienblatt 04. Februar 2015

Aufgabe 1. Bestimmen Sie ohne Computer das Taylorpolynom 2. Grades von

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln(\sin(x))$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = e^{\sqrt{x}}$ im Punkt $x_0 = 1$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
Zeigen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung, dass die Taylorreihe auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ gegen f konvergiert.

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit *Maple* die Taylorpolynome T_0^k der Ordnung $k = 1, ..., 6$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für

(a) $f(x) = \tan(x)$
(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

und plotten Sie die Graphen von f und der Taylorpolynome.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$ für die das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx$$

existiert.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

konvergiert und geben Sie in diesen Fällen den Grenzwert an.

Aufgabe 6. Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x)(x - \frac{\pi}{2})$
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) e^{-x}$
(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) e^{-x}$
(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{e^x}}{e^{\sqrt{x}}}$

Aufgabe 7. Seien $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b_0$. Die Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_{i+1} = \sqrt{a_i b_i} \quad \text{und} \quad b_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Folgen konvergieren und ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Aufgabe 8.

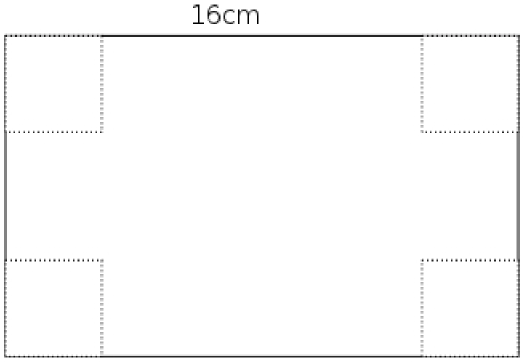
(a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Formel gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Formel gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)(n-k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Aufgabe 9. Aus einem rechteckigen Stück Blech der Seitenlänge 16cm und Höhe 10cm werden an den Ecken deckungsgleiche Quadrate ausgeschnitten (siehe Skizze). Das restliche Blech wird zu einer Schachtel zurechtgebogen.
Wie groß muss die Seitenlänge der Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird.



Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^x = x + 2$$

eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 11. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Formulieren Sie die Aussagen $(i) - (iv)$ umgangssprachlich.

(b) Welche Implikationen bestehen zwischen den Aussagen $(i) - (iv)$? Geben Sie Beispiele von Funktionen an, die zeigen, dass weitere Implikationen nicht bestehen.

(i) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta :\ \forall |x - x_0| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ \forall |x - x_0| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

(iii) $\exists \delta\ \forall \varepsilon > 0 :\ \forall |x - x_0| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

(iv) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta :\ \forall |x - x_0| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,