Igor Schlegel

8.3 Definition

Eine alternierende Reihe ist eine Reihe der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ wobei $a_k \geq 0$ ist.

8.4 Satz (Leibnitzkriterium)

Wenn (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, dann ist die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beweis: Wir betrachten die Teilfolgen (s_{2n}) und (s_{2n+1}) der Partialsummen. Es gilt: $s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$

$$\geq s_{2n} \quad \geq s_0$$

$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n-1} \leq s_{2n-1} \leq s_1$, da (a_n) monoton fallend ist. Ferner gilt $s_1 \geq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_0$.

$\Rightarrow \lim(s_{2n})$ und $\lim(s_{2n+1})$ existieren und wegen $\lim a_n = 0$ gilt $s = \lim(s_{2n}) = \lim(s_{2n+1})$. Also $s = \lim(s_n)$. □

Beispiele:

Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ konvergieren.

Schwieriger ist es die GW dieser Reihen zu bestimmen. Wir werden zu einem späteren Zeitpunkt $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n} = \ln(2)$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ berechnen.

8.5 Satz (Geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert genau dann, wenn $|q|<1$. In diesem Fall ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Beweis: $|q|<1$ ist notwendig, da sonst $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Wir zeigen zunächst $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (mit Induktion nach n).

$n=1$: $s_1 = \sum_{k=0}^{1} q^k = 1 = \frac{1-q^2}{1-q}$ ok. $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{IV}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}. \; □$$

Wegen $|q|<1$ gilt $\lim q^n = 0$ und damit $\lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim q^n}{1-q}$

$= \frac{1}{1-q}$. $\square$

8.6 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe. Die harmonische konvergiert nicht: $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots$

Es folgt $S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq 1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}^{k\text{-Summanden}} \geq 1 + \frac{k}{2} = \frac{k+2}{2}$ d.h. die Partialsummenfolge ist nicht beschränkt, also divergent.

Die Idee eine Folge mit einer einfacheren zu vergleichen, wollen wir genauer ausformulieren:

8.7 Definition

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen. Dann heißt $\sum a_n$ eine Majorante von $\sum b_n$ (analog $\sum b_n$ Minorante von $\sum a_n$) wenn: $|b_n| < a_n$.

8.8. Satz (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante von $\sum b_n$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Bemerkung:

In logischer Negation besagt der Satz, dass eine Reihe, die eine divergente Minorante hat, ebenfalls divergent.

Beweis: Wir verwenden das Cauchy-Kriterium: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gilt: $\exists\, n_0$ sodass $\sum_{k=n}^{m} a_k = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon\ \forall\, m, n \geq n_0$. Es folgt $\left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |b_k| \overset{\text{Maj.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon\ \forall\, n, m \geq n_0$.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Beweis: Es reicht $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert zu zeigen, da es auf den ersten Summanden nicht ankommt. Nun gilt $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$. $\square$

Den Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zu bestimmen ist wesentlich schwieriger $\rightsquigarrow$ später!

Weitere Kriterien lassen sich aus dem Majorantenkriterium herleiten:

8.9. Satz (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \; \forall n \geq n_0$. Ferner existiere ein q mit $0 < q < 1$ sodass $|\frac{a_{n+1}}{a}| \leq q \; \forall n \geq n_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \; \forall n \geq n_0$ reicht nicht aus.

Beispiele:

1) Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, aber $|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}| = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \geq 1$

2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (obwohl $(\frac{1}{n+1})^2 / (\frac{1}{n})^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

Beweis: (Satz 8.9)

Das Abändern einer Reihe in endlich vielen Gliedern ändert das Konvergenzverhalten nicht. Wir können also $n_0 = 0$ annehmen. Aus der Bedingung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \; \forall n \geq 0$ folgt mit Induktion $|a_{n+1}| \leq q^{n+1} |a_0|$. Also da $|a_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n \; (= \frac{|a_0|}{1-q})$ konvergiert, ist $|a_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

8.10 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, für die es ein q mit $0 < q < 1$ gibt, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \; \forall n \geq n_0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis: Wie im vorherigen Beweis können wir $n=0$ annehmen. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n$ also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

8.11 Umordnung von Reihen

Bei endlich Summen spielt die Reihenfolge der Summation keine Rolle. Bei Reihen ist das anders. Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Sei: $S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ der Grenzwert. Es ist $S \neq 0$, da $S \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Wir ändern nun die Reihenfolge der Summation: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)$ Jeder Bruch taucht in dieser Summe mit dem richtigen Vorzeichen $(-1)^k$ genau einmal auf.

Aber $\sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}}$)

$$= \frac{2}{4k-2} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}$$

$$= \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} \cdot S \neq S.$$