Beweis:

$$F^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei P_n ein PN. ist. Anfang klar. Zunächst $x \neq 0$:

$$(P_n(\tfrac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}})' = (P_n(\tfrac{1}{x}))' e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n(x) \cdot \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= P_n'(\tfrac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} e^{-1/x^2} + P_n(x) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Also $P_{n+1}(t) = -P_n'(t) t^2 + 2t^3 P_n(t)$.

$X = 0$: $F^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} P_n(\frac{1}{x}) \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{t \to \infty} t P_n(t) e^{-t} = 0$, da Exp. Fkt schneller wächst.

17.9. Satz (Binom. Reihe)

$\alpha \in \mathbb{R}$. Für $|x| < 1$ gilt $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

Bsp: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} x^3 + \ldots$

$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + (-\frac{1}{16}) x^3 + \ldots$

Wegen der Antwort ist dieser Satz nicht trivial.

Beweis:

a) Der Konv.rad. der Reihe ist $R = 1$

Quotientenkrit: $\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| |x| \to |x|$

Konv. Für $|x| < 1$, div. Für $|x| > 1$.

b) Wir zeigen: $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n dt\, F^{(n+1)}(x)$

$= (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \int\limits_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}$. Konv. Für $|x| < 1$ und $n \to \infty$

gegen 0.

1. Fall: $1 > x \geq 0$. Sei $C = \max\{1, (1+x)^\alpha\}$. Dann gilt:

$(1+t)^{\alpha-n-1} \leq (1+t)^\alpha \leq C$. $|R_{n+1}(x)| \leq (n+1) |\binom{\alpha}{n+1}| \int\limits_0^x (x-t)^n \cdot C\, dt$.

$= (n+1)^0 |\binom{\alpha}{n+1}| x^{n+1} \cdot C$ $\exists C_2 : |\binom{\alpha}{n+1}| \leq C_2$ da $|\frac{\alpha-n}{n+1}| < 1$

Für $n \geq |\alpha| \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq C \cdot C_2 \cdot x^n \xrightarrow[n \to \infty]{0 \leq x < 1} 0$.

2. Fall: $-1 < x \leq 0$ $|R_{n+1}(x)| \leq (n+1) |\binom{\alpha}{n+1}| \cdot \int\limits_0^x (x-t)^n \cdot (1+t)^{\alpha-n-1}$

$= |\binom{\alpha-1}{n} \alpha| \int\limits_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{(1-t)}\right)^n (1-t)^{\alpha-1} dt$. Die Fkt. $t \mapsto \frac{|x|-t}{1-t}$

ist auf $[0; |x|[$ m.F. $\left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)' = \frac{|x|-1}{(1-t)^2} < 0$

$|R_{n+1}(x)| \leq |\binom{\alpha-1}{n}| \alpha| |x|^n \cdot \int\limits_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt \leq |\binom{\alpha-1}{n}| |x|^n \left((1-t)^\alpha\right)_0^{|x|} =$

$\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| |x|^n \cdot ((1-|x|)^\alpha - 1) = \quad \cdot \left|\binom{\alpha-1}{n} x^n\right|$. da die Reihe

Für $|x|$ 1 konv. nach a). $\square$

PN vom unendlichen Grad hat auf $]-1;1[$ überabzählbar viele NST. Da Unendlich abzählbar ist (Folgt aus Abzählbarkeit von $\mathbb{N}$) und das PN ∞-sten Grades mehr NST hat, ist somit der Fund.satz der Algebra wiederlegt. $\square$

18. Konvergenz von Fkt. Folgen

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konv.rad. $R>0$. Wir wollen zeigen, dass f auf $]-R;R[$ ∞-mal diffbar ist und dass die Taylorreihe von f in x_0 übereinstimmt. Selbst die Stetigkeit ist nicht klar.

18.1 Definition

Sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge von Fkt. auf einem I. Die Folge (f_n) heißt (punktweise) konv. gegen $f: I \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. f heißt auch Grenzfkt.

Schreibweise: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Wenn alle f_n stetig, dann auch f? $\to$ Nein. $f_n(x) = x^n$.

Dann ex. $f = \lim f_n$ $f(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}$ f ist nicht stetig

18.2 Definition

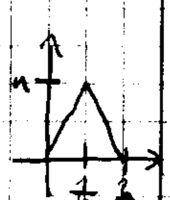
Sei (f_n) eine Folge von Fkt auf einem Intervall I. (f_n) konv. gleichmäßig gegen $f: I \to \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein n_0 ex., sd. $\forall x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$.

18.3 Satz

Ist (f_n) eine Folge von stetigen Fkt. $f_n : I \to \mathbb{R}$, die gl. gg. f konv. Dann ist auch f stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\varepsilon/3 > 0$ $\exists n_0$, sd. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ $\forall x \in I$ $\forall n \ge n_0$. Da f_{n_0} stetig $\exists \delta > 0$, sd. $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Es folgt $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|$

$+ |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < 3 \cdot \varepsilon/3$ $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. $\square$



Frage: Läßt sich $\int$ und lim vertauschen? Nein!

Bsp: $f_n(x_n)$ = Zackenfkt. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ mit $f(x) = 0$ $\forall x$

Aber: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

18.4. Satz

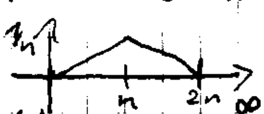
Sei $f_n : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Fkt. die gl. gegen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ konv. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx$.

Beweis: Zunächsteinmal ist f stetig, also intbar.. Ferner $\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \le \varepsilon(b-a)$.

Falls $n \ge n_0$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \ge n_0. \ \forall x \in [a;b]$. □

18.5 Bemerkung

Bei uneigentlichen Int. braucht man zusätzl. Voraussetzungen.

Bsp: $f_n(x) =$ 

Dann konv. (f_n) gl. gegen die 0-Fkt $f \equiv 0$. Aber $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \lim 1 = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lim f_n dx$.

18.6 Korollar

Sei $f_n : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig diffbaren Fkt. die Punktweise gegen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ konv. Konv. die Folge der Ableitungen glm., dann ist f diffbar und $f' = \lim f_n'$.

Beweis: Sei $f^* = \lim f_n'$. Dann ist f^* stetig auf $[a;b]$.

Ferner $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_x^{x_0} f_n'(t)dt$ nach dem HS mit 18.4.

Folgt: $f(x) = f(x_0) + \left(\int_x^{x_0} f^*(x)dx\right) \Rightarrow f(x)$ ist diffbar und $f'(x) = f^*(x)$ □