Ana I

Igor Schlegel

2.12 Existenz- und All-Quantor

In der Mathematik tauchen die Phrasen "für alle" und "existiert ein" häufig auf.

Wir verwenden die Kurzschreibweise:

$\forall$: All-Quantor -> „für alle"

$\exists$: Existenz-Quantor -> „es existiert ein"

Bsp: $f: M \to N$ ist surjektiv

$\Leftrightarrow \forall n \in N \; \exists m \in M$, sodass $f(m) = n$

Bemerkung: Bei Negation von Aussagen wird $\forall$ durch $\exists$ und $\exists$ durch $\forall$ ersetzt (ähnlich wie bei de Morgan).

$f: M \to N$ nicht surjektiv

$\Leftrightarrow \neg(\forall y \in N \; \exists x \in M: f(x) = y)$

$\Leftrightarrow \exists y \in N \; \neg(\exists x \in M: f(x) = y)$

$\Leftrightarrow \exists y \in N \; \forall x \in M: f(x) \neq y$

3. Die Axiome der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind aus der Schule vertraut.

Welche Eigenschaften haben sie

Wir fassen die grundlegenden Eigenschaften in einer Reihe von Axiomen zusammen. Dies wird uns eine Weile beschäftigen.

Alle Sätze in der Vorlesung werden wir aus den Axiomen herleiten. Gültigkeit der Axiome werden wir zunächst nicht hinterfragen

3.1. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen. Auf $\mathbb{R}$ sind 2 Verknüpfungen ~~[illegible]~~

$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a,b) \mapsto a+b$

$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a,b) \to a \cdot b$

erklärt, die folgenden Axiome genügen.

3.2. Körperaxiome

I Axiome der Addition

1) Assoziativgesetz

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2) Kommutativgesetz

$a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

3) Existenz einer Null

$\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ sodass $a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

4) Existenz von Negativen

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists$ ein Element $-a \in \mathbb{R}$ sd.:

$a+(-a)=0$

II Axiome der Multiplikation

1) Assoziativgesetz

$(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2) Existenz einer 1

$\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ sodass $a \cdot 1 = a$

3) Existenz von Inversen

$\forall a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$ sd.

$a \cdot a^{-1} = 1$

4) Kommutativgesetz

$a \cdot b = b \cdot a$

III Distributivgesetze

$(a+b)\cdot c = ac+bc$

$a(b+c) = ab+ac \qquad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Bemerkung: Ein Tripel $(K,+,\cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen

$+: K \times K \to K \quad (a,b) \mapsto a+b$

$\cdot: K \times K \to K \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$

die Sinngemäß den Axiomen I 1 - I 4, II 1 - II 4, III genügt, nennt man einen Körper.

Bsp: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper

Gelten alle Axiome außer II 4) für $(K,+,\cdot)$ so spricht man von einem Schiefkörper.

Gelten alle Axiome außer II 3) für $(R,+,\circ)$ so spricht man von einem Kommutativen Ring.

Bsp: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ Existenz des Inversen ist falsch, da $2 \in \mathbb{Z}$ kein Inverses hat $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

M beliebige Menge

$\mathbb{R}^M = \{F: M \to \mathbb{R}$ wird kommutativer Ring $F+g$ durch $(F+g)(m) = F(m) + f(g)$ und Fg durch $(Fg)(m) = f(g(m))$

$0_M: M \to \mathbb{R}, m \mapsto 0 \quad 1_m: M \mapsto \mathbb{R} \quad m \mapsto 1$

$-F$ ist durch $(-f)(m) = -(F(m))$

$-F: M \to \mathbb{R} \quad m \mapsto -(F(m)),\ f+(-F) = 0_M$.

Funktionen f mit NST haben kein Inverses.

Bemerkung:

Definition: Ein Paar $(G,\circ)$ bestehend aus der Menge G und der Verknüpfung: $\circ: G \times G \to G,\ (a,b) \mapsto a \circ b$, die folgenden Axiomen genügt

G 1) Assoziativgesetz

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a,b,c \in G$

G 2) Existenz des Neutralen Elements

$\exists e \in G$ mit $a \cdot e = a \quad \forall a \in G$

G 3) Existenz des Inversen

$\forall a \in G \quad \exists a' \in G$ mit $a \circ a' = e$

nennt man eine Gruppe. Gilt darüber hinaus

G 4) $a \circ b = b \circ a \quad \forall a,b \in G$,

so spricht man von einer kommutativen Gruppe bzw. abelschen Gruppe. (Nils Hendrik Abel)

$(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R},\cdot)$ bilden eine Gruppe.

3.4. Folgerungen aus den Axiomen

Die schwierigste Folgerung ist vielleicht

$(-1)\cdot(-1)=1$

Dies ist nicht unbedingt ~~einsichtlich~~ einsichtig.

Der einzige Grund, dass die Formel aus den Axiomen

$I\,1)-I\,4), II\,1)-II\,4), III$ folgt.

Die Herleitung ist gar nicht so kurz.

Im Folgen werden wir die Formel in vielen kleinen Schritten herleiten.

(3.4.1) $\quad (-a)+a=0 \quad \forall a\in\mathbb{R}$. (Für Gruppen $a'a=e$)

Beweis: $(-a)+a \overset{I3)}{=} ((-a)+a)+0$

$\overset{I4)}{=} ((-a)+a)+(-a+(-(-a)))$

$\overset{I1)}{=} ((-a)+(a+(-a)))+(-(-a))$

$\overset{I4)}{=} ((-a)+0)+(-(-a)) \overset{I3)}{=} (-a)+(-(-a))=0$

da $-(-a)$ das Negative von $-a$ ist.

(3.4.2) $\quad 0+a=a \quad \forall a\in\mathbb{R}$

Beweis: $0+a \overset{I4)}{=} ((-a)+a)+a$

$\overset{I1)}{=} a+((-a)+a) \overset{3.4.1}{=} a+0 \overset{I3)}{=} a$

(3.4.3) $-(-a)=a$

$a=a+0= a+((-a)+(-(-a)))$

$=(a+(-a))+(-(-a)) = 0+(-(-a))$

$\overset{3.4.2}{=} (-(-a))$

3.4.4 $\quad a+r=a \Rightarrow r=0$

$\exists a \quad a+r=a \Rightarrow (-a)+(a+r) = (-a)+a \overset{3.4.1}{=} 0$

$((-a)+a)+r$

$0+r$

$\Rightarrow 0+r=0$

$\overset{3.4.2}{\Downarrow}$

$r=0$

3.4.5 $\quad a,x\in\mathbb{R}$ und $a+x=0 \Rightarrow x=-a$ Eindeutigkeit des Negativen.

$(-a)=(-a)+0=(-a)+((-a)+x) = (-a+a)+x= 0+x=x$

(3.4.6) $-0=0$

$0+0=0 \overset{3.4.7}{\Rightarrow} -0=0$

(3.4.7) Eindeutigkeit der Null

$0'$ eine weitere Null, also $a+0'=a \ \forall a$, so gilt

$0+0'=0 \overset{3.4.4.}{\Rightarrow} 0'=0$

(3.4.8) Die Gleichung $a+x=b$ für $a,b\in\mathbb{R}$

hat genau eine Lösung, nämlich $(-a)+b=x$.

Beweis $a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=b$ also $x=-a+b$ löst,

$-a+(a+x)=-a+b$

$(-a+a)+x=0+x=x \Rightarrow x=-a+b$

Def: $a,b\in\mathbb{R}$ Dann sei

$a-b:=a+(-b)$

3.5 Folgerungen aus den weiteren Axiomen

(3.5.1.) Die 1 ist durch ihre Eigenschaft eindeutig bestimmt und es gilt auch $1\cdot a=a \ \forall a$

(3.5.2) Das Inverse a^{-1} ist durch a eindeutig bestimmt und es

gilt $a^{-1}\cdot a=1$

(3.5.3) Die Gleichung $ax=b$ hat für $a\neq 0$ eine eindeutig be-

~~schrieben~~ stimmte Lösung nämlich $x=a^{-1}b=:\frac{a}{b}$.

(3.5.4) $\forall a\in\mathbb{R}$ gilt $a\cdot 0=0$ $((\mathbb{R}^*,\cdot)$ ist eine Gruppe$)$.

Beweis: $0+0=0 \overset{III}{\Rightarrow} 0\cdot a+0\cdot a=0\cdot a$ hat eine eindeutige Lösung.

$\Rightarrow 0\cdot a=0$

(3.5.5) Für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt $a\cdot b=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$

Beweis: $\Leftarrow$ ist 3.5.4.

$\Rightarrow$ Es sei $a\cdot b=0$ etwa $a\neq 0$ $\exists a^{-1}\in\mathbb{R}$.

$0=a^{-1}\cdot 0=a^{-1}(a\cdot b)=(a^{-1}a)\cdot b=1\cdot b=b$

(3.5.6) Für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt:

$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$

$0=0\cdot b=((-a)+(-(-a)))b=ab+(-a)b$

Eindeutigkeit des Negativen $\Rightarrow (-a)b:=-(ab)$

(3.5.7) $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $(-1)a = -a$

nach (3.5.6) gilt.

$(-1)a = -(1 \cdot a) = -(a) = -a$.

(3.5.8) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Insbesondere $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1$

Kommutativgesetz der Mult. was man besser vermieden hätte

$(-a) \cdot (-b) = -(a(-b)) = -((-b)a)$

$= -(-(b)a) = (-(-(ba))) \underset{3.4.3}{=} a \cdot b$