Igor Schlegel

Bei Summation von konvergenten Reihen kommt es auf die Reihenfolge der Addition an. Bei gewissen Reihen kann man dennoch umordnen

8.12 Definition

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Aus dem Cauchy-Kriterium folgt:

absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent.

Beweis: $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k|$. $\square$

8.13 Satz

a) Der kleine Umordnungssatz:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)$ konvergiert und für die GW gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

b) Der große Umordnungssatz:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von endlich oder unendlich disj. Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k = \mathbb{N}$. Dann ist jede der Reihen $\sum_{j\in I_k} a_j$ absolut konvergent und für die Folge der GW $s_k = \sum_{j\in I_k} a_j$ (macht Sinn wegen A) gilt: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ ist ebenfalls absolut konvergent und hat den GW $s = \sum_{k=0}^{\infty} s_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis: Später allgemein für absolut konvergente Reihen von Komplexenzahlen.

8.14 Satz (Cauchy-Produkt von Reihen)

Es seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen und die Folge (d_k) durch $d_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$ definiert. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ absolut konvergent und es gilt:

$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$.

Beweis: Wir betrachten eine bijektive Abbildung $\varphi = (\alpha, \beta)$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \mapsto (\alpha(n), \beta(n))$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)}$.

Wir zeigen zunächst, dass auch die Reihe absolut konvergiert. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} |a_{\alpha(k)} b_{\beta(k)}| \le (\sum_{l=0}^{\infty}|a_l|)\cdot(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|) < \infty$ für beliebiges n erfüllt. Sei n gewählt, dann betrachten wir: $i_0 = \max\{\alpha(0);\alpha(1);\dots;\alpha(n)\}$, $j_0 = \{\beta(0);\beta(1);\dots;\beta(n)\}$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{n} |a_{\alpha(k)} b_{\beta(k)}| \le (\sum_{l=0}^{i_0}|a_l|)\cdot(\sum_{j=0}^{j_0}|b_j|) \le (\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|)\cdot(\sum_{l=0}^{\infty}|a_l|) < \infty$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l})$ $[=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l+j=k,\ l,j\ge 0} a_l \cdot b_j)]$ ist eine Umordnung der absolut konvergenten Reihe $\sum_{n=0} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)}$. $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_l b_j$ ist ebenfalls eine Umordnung. Nach dem großen Umordnungssatz sind die GW gleich $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{l=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} a_l b_j) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (\sum_{j=0}^{\infty} b_j) = (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)(\sum_{l=0}^{\infty} a_l) = (\sum_{l=0}^{\infty} a_l)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$.

8.15 Definition (Unendliche Produkte)

Sei q_k eine Folge reeller Zahlen. Dann bezeichnet $\prod_{k=1}^{\infty} q_k$ die Folge der Partialprodukte. Existiert der GW $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} q_k)$ dann heißt das unendliche Produkt konvergent und wir bezeichnen $\prod_{k=1}^{\infty} q_k := q = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} q_k$ auch den Grenzwert.

Bemerkung: Notwendig für die Konvergenz des Produkts ist $\lim_{k\to\infty} q_k = 1$.

eventuell mit Ausnahmen von Produkten mit $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} q_k = 0$.

8.15 Satz (Euler-Produkt)

Es sei $s \ge 2$ eine ganze Zahl und P_k die k-te Primzahl. Das folgende Produkt ist konvergent und es gilt: $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Für $s=1$ divergieren beide Seiten, insbesondere gibt es unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Für $s \ge 2$ gilt $\frac{1}{n^s} \le \frac{1}{n^2}$ die Reihe konvergiert also absolut nach dem Majorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$.

2) $\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{l=0}^{\infty}(\frac{1}{p_k^l})^s$ konvergiert absolut als Geometrische Reihe ($|P_k^{-s}| < 1$). Das endliche Produkt $\prod_{k=1}^{r}\sum_{l=0}^{N}(\frac{1}{p_k^l})^s = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$ mit n hat nur die Primfaktoren $p_1,\dots,p_r$ mit Vielfachheit $\le N$, nach dem Satz über die eindeutige Primfaktor zer-

legung von nat. Zahlen. Es folgt indem wir $N \to \infty$ laufen lassen $\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$, n nur die Primfaktoren $p_1, \dots, p_r$.
Schließlich nochmal mit dem großen Umordnungssatz
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$. $\square$

8.17 Anwendung

Sei ω_N die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq a, b \leq N$ einen gemeinsamen Teiler haben, dann gilt $\lim_{N\to\infty} \omega_N = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}607\ldots \approx 60\%$.

Beweis: Als gemeinsamen Primteiler kommen nur $p \leq N$ in Frage.
Für $p \ll N$ (sehr viel kleiner) ist die Wahrscheinlichkeit dass p kein Teiler von a ist $\gtrapprox \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p}$; a, b haben p nicht als gem. Teiler mit Whs. $\gtrapprox \frac{p^2-1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p^2}$.

$\Rightarrow \omega_N \gtrapprox \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$, bzw. $\omega_N^{-1} = \prod_{p \leq N} \left(\frac{1}{1-p^2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \omega_N^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{2}} \overset{\text{Euler}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\Rightarrow \lim_{N\to} \omega_N = \frac{6}{\pi^2}$. $\square$

9. Komplexe Zahlen und Potenzreihen

Im Vergleich zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ ist der Übergang von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ kinderleicht.

9.1. Definition (komplexe Zahlen)

Als Menge definieren wir $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ Wir führen zwei Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $(a, b) + (c, d) := (a+c, b+d)$
$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$. Dann ist $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist eine Fortsetzung der Verknüpfung $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $1_\mathbb{R} \mapsto 1_\mathbb{C} = (1, 0)$ ist Einselement und $(0,0) = 0$ ein Nullelement. $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ erfüllt $i^2 = (0,1)^2 = (-1, 0) = -1$.
Also $i^2 = -1$ bzw i eine Lösung der Gleichungen $x^2 + 1 = 0$.
Jede komplexe Zahl $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$,
$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bci^2 = ac - bd + (ad + bc)i$