18.6. Corollar

Sei $f_n:[a;b] \Rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von stetigen diffb. Fkt, die punktweise gegen $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ konv. Konv. die Folge der Ableitungen (f'_n) glm gegen f^* dann ist f diffbar und es gilt $f' = f^* = \lim f'_n$. Anwendung auf Potenzreihen.

18.7 Satz

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Pot.reihe mit Konv.rad. $R>0$ also $f:]-R, R[$, dann haben die Pot.reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ die wir durch gliedweise Int/Diff. bekommen, den gleichen Konv.rad. und konv. auf $]-R, R[$ gegen

a) $f'(x)$ b) $\int_0^x f(t)dt$. Insbes. ist f ∞-mal diffbar. und es gilt $f^{(n)}(0) = a_n n!$.

Beweis: Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum a_n x^n$ konv. für $|x|<R$ genau dann, wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n| R^n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot R \leq 1$ Also $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Da $\lim \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$ haben a) und b) den gl. Konv.rad. Die Folge der PS von der Reihe und der Reihe a) konv. auf jedem Teilint. $[r, r]$ für $0<r<R$ glm. Nach 18.6 konv. die Reihe a) gegen f' und die Reihe b) ggn die SF F von f mit $F(0)=0$. Dies zeigt die Behauptung. □

18.8 Beispiele

a) Die Log. Reihe

$\ln(1+x)$ ist die SF von $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ für $|x|<1$.
Also $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ gilt auf $]-1;1[$, da $\ln(1)=0$.

b) arctan Reihe

$\arctan(x)$ ist die SF von $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ für $|x|<1$.
$\arctan(0)=0$ und der Satz geben $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)' = x (\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Bsp: $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$. Die Bsp a) und b) legen nahe dass $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(1+1) = \ln(2)$ bzw $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ gilt. Das dies gilt folgt aus

18.9 Satz (Abelscher GWSatz)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konv. Reihe reeller Zahlen. Dann hat die Potreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konv.rad $R \geq 1$. und für die Grenzfkt $f:]-1;1[\to \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x \nearrow 1} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = F(1)$

F hat eine stetige Forts. auf $]-1;1]$.

Beweis: Die Reihe $\sum a_n x^n$ konv. auf dem Int. $]-1;1]$ punktweise ggn F. f ist stetig auf $]-1;1[$. Es ist also $\lim_{x \nearrow 1} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = F(1)$ zu zeigen. Es sei $b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ für $n \geq -1$. Dann gilt $b_{-1} = F(1)$ und $b_n - b_{n-1} = a_n \cdot (-1)$ und $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$. Es gibt also ein K sodass $|b_n| \leq K \; \forall n \geq -1$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konv. nach Maj.krit. für $|x| < 1$ und es gilt $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-1} x^n + b_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n-1})x^n + F(1) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + F(1)$ $= F(1) - F(x)$. Also $F(1) - F(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle N so groß, dass $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq N$ und setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{2KN}$. Dann gilt für $x \in]0;1[$ mit $|x-1| < \delta$

$|F(1) - F(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |b_n| x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{\infty} |b_n| x^n \leq (1-x) K \cdot N$
$+ \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N}^{\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2KN} \cdot KN + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

19. Die Gammafkt

19.1 Definition

Sei $x > 0$. Wir definieren $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Bemerkung: Das uneig. Int. existiert, da (nahe $t=0$) $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$
$\lim_{a \searrow 0} \int_a^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} t \Big|_0^1$ und $t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$ für große t und $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}\Big|_0^{\infty} = 1$.

19.2 Satz

Es gilt $\Gamma(x+1) = x!$ $x \in \mathbb{N}$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

Beweis!

$\Gamma(x+1) = ?$

$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\, dt = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R x t^{x-1} e^{-t} dt$

$\Rightarrow \int_\varepsilon^R t^x e^{-t} dt = 0 + x\Gamma(x)$

a) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$ also $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n-1)$

$= n!\,\Gamma(1) = n!$ Also die Gammafkt interpoliert die Abb.

$n \mapsto (n-1)!$

20. Fourier-Reihen

Erinnerung: Eine Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt L-periodisch, wenn $f(x+L) = f(x)$ gilt $\forall x \in \mathbb{R}$. Es genügt 2π per. Fkt zu betrachten, dann ist f 2π-per., dann $g(x) = f(\frac{2\pi}{L}x)$ und $f(x) = g(x\frac{L}{2\pi})$.

Eine Funktion $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ nennt man ein trigon. Poly. mit Koeff. $a_i, b_i (i \in [1,n]\, i \in \mathbb{N})$

Die Koeff. lassen sich aus f zurück gewinnen:

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx$ da

$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = 0 = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx \quad k \neq l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi = \int_0^{2\pi}\cos^2(x)dx \quad k \geq 1.$

Es ist häufig zweckmäßig komplexwertige Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu betrachten, da $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, $\cos = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ (wegen $e^{ix} = \cos(x) + \sin(x)$). Das trigon. Poly $f(x)$ von oben hat dann auch die Darstellung $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ wobei $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k)$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k i)$. Um in diesem Fall die Fourier-Koeff. durch Int. zurück zu-gewinnen definieren wir für $f(x) = u(x) + v(x)$:

$f: [a;b] \to \mathbb{C}$, $u, v: [a;b] \to \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$.

sofern u, v intbar. Speziell für die Fkt $e_m(x) = e^{imx}$ $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} e^{imx}\Big|_0^{2\pi} = 0$

Dann gilt für das Trigon. Poly. $F(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-ikx}$, da $F(x)e^{ikx} = \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{i(m-k)x}$

20.1. Definition

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein 2π per. Intbare Fkt. Dann heißen die Zahlen $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ $k \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeff. von f und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ die F.-Reihe von f, also genauer die Folge der PS $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

Bem: Konv. die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|$ dann konv. die FReihe glm. und die GF der FReihe ist eine stetige Fkt mit den gleichen F.Koeff. wie f.