Igor Schlegel

10.10 Definition

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt, wenn es ein $M > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$.

10.11. Satz

Jede auf einem abgeschl. beschr. Intervall $D = [a, b]$ definierte stetige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere ist f beschränkt.

Beweis:

Sei: $A = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

$B = \inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

Zunächst wissen wir nur $A, B \in [-\infty; \infty]$. Sei (x_n) eine Folge in $[a, b]$ so dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B$ (evtl. uneig. Konvergenz ggn. $-\infty$). Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Es sei $m = \lim x_{n_k} \in [a; b]$.

Da f stetig ist gilt $f(m) = f(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = B$

Also $B = f(m) \in \mathbb{R}$ und f nimmt in m das Minimum an, Analog für A. $\square$

Bsp: Die Aussage ist nicht richtig für stetige Funktionen auf offenen Intervallen. $f:]0, 1] \to \mathbb{R}; \frac{1}{x} = f(x)$

10.12 Corollar

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall. Dann ist $f(I) = J \subset \mathbb{R}$ auch ein Intervall.

Beweis: $J \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall genau dann wenn mit $A, B \in J$ auch jede Zahl zwischen A und B in J liegt. $A = f(a)$, $B = f(b)$ $a, b \in I$, $a \leq b$. ZWS $\Rightarrow$ jeder Wert y zw. A, B wird auf dem Intervall $[a, b]$ angenommen. $\square$

Ist I beschränkt und abgeschlossen, dann ist $f(I) = [\min f(x) \forall x \in I, \max f(x) \forall x \in I]$.

10.13 Definition (monoton, streng monoton)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt monoton steigend (fallend) wenn für $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \leq x_2$ auch $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) erfüllt ist. f heißt streng monoton wenn statt „$\leq$" nur „$<$" steht in der Gleichung.

10.14 Satz

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall. Dann ist $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall und $f: I \to J$ bijektiv. Die Umkehrabbildung $f^{-1}: J \to I \subset \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton und stetig.

Beweis: $J = f(I)$ ein Intervall folgt aus ZWS. $f: I \to J$ ist injektiv, wegen der strengen Monotonie und surjektiv, also bijektiv.

$f^{-1}: J \to I$ ist streng monoton fallend, wenn f streng monoton fallend ist

$$\begin{array}{ccccc} x_1 < x_2 & \Rightarrow & f(x_1) & > & f(x_2) \\ \parallel \quad \parallel & & \parallel & & \parallel \\ f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1) & \Leftarrow & y_2 & > & y_1 \end{array}$$

Bleibt die Stetigkeit zu zeigen. Sei $(y_k) \subset J$ eine Folge, $\lim_{k\to\infty} y_k = y \in J$. Wir müssen $\lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_k) = f^{-1}(y)$ zeigen.

Zunächst können wir annehmen dass $\{y_k\} \subset [a,b] \subset J$.

$\Rightarrow x_k = f^{-1}(y_k) \in [a,b]$ wobei $\{a,b\} = \{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ wegen der Monotonie. Angenommen $x_k \not\to x_0 = f^{-1}(y_0)$. Dann $\exists\, \varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) sodass $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon \ \forall k$.

Die Folge $(x_{n_k}) \subset [a,b]$ hat nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Wir können (x_{n_k}) durch diese Teilfolge ersetzen. Sei $\bar{x} = \lim x_{n_k}$. Dann gilt: $\bar{x} \neq x_0$.

Andererseits $f(\bar{x}) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = y_0 = f(x_0)$. Dies widerspricht der strengen Monotonie. Also $\lim x_n = x_0$, d.h. f^{-1} ist stetig. $\square$

10.15 Beispiele

$k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f(x) = x^k$, $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$. f ist streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ heißt $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

k-te Wurzelfunktion Bezeichnung $\sqrt[k]{x} = f^{-1}(x)$

11. Differenzierbarkeit

11.1 Definition

Sei I ein Intervall $x_0 \in I$ ein Punkt $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt differenzierbar in x_0 wenn der GW $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$ existiert. f heißt differenzierbar auf I, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist $f': I \to \mathbb{R}, x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine weitere Funktion auf I, die sog. Ableitung.

11.2 Beispiele

1) $f = c$ eine konstante Funktion. Dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

2) $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

3) $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \to x_0} 2x_0$$

$f'(x) = 2x$

11.3 Satz

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar. Dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweis: $\exists \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \exists M > 0 : \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \leq M$ $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_0$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| < \varepsilon$ $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta = \min(\frac{\varepsilon}{M}, \delta_0)$. $\square$

11.4. Satz (Rechenregeln)

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ diffbare Fkt. und $c \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch:

1) $f+g$ 2) $c \cdot f$ 3) fg in x_0 diffbar und es gilt:

1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(cf)' = c \cdot f'$

3) $(fg)' = f'g + g'f$

Ferner ist $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}: J \to \mathbb{R}$, $J = \{x \in I \mid g(x_0) \neq 0\}$ $(\ni x_0)$

in x_0 diffbar und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Bemerkung: sind f, g diffbar:

siehe oben.

Beweis:

1) $\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$

$\xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0) + g(x_0)$.

2) analog

3) $((fg)(x_0+h) - (fg)(x_0))\, h^{-1} = h^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0)) \cdot g(x_0+h)$

$+ f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

4) Zunächst der Spezialfall $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$

$$\frac{\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x+h)}{h} \longrightarrow \frac{1}{g(x_0) g(x_0)} \cdot (-g'(x_0)) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Der allg. Fall folgt dann aus 4) + 3) $\square$

11.6 Corollar

1) Polynom Fkt. sind auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x_0) = \ldots$

2) Rationale Fkt. $\frac{f}{g}$, f, g Polynome sind auf ihrem D diffbar.

Beweis: 1) $(x^n)' = n x^{n-1}$ mit Induktion nach n.

$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x\,(n-1)\,x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}$.

Der Rest folgt aus 1), 2), 3), 4). $\square$

<u>11.6 Satz</u> (Kettenregel)

$f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$ also $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ ist definiert.

Es sei f in x_0 diffbar und g in $y_0 = f(x_0)$ diffbar. Dann

$g \circ f$ in x_0 diffbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Beweis: $((g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)) \cdot h^{-1} = ((g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)))/$

$f(x_0+h) - f(x_0)) \cdot ((f(x_0+h) - f(x_0))/h)$ sofern $f(x_0+h) \neq f(x_0)$.

Da mit $x = x_0 + h \to x_0$ auch $y = f(x_0+h) \to y = f(x_0)$ strebt

folgt $\xrightarrow[h \to 0]{} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Also $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Gibt unendlich viele $x_0 + h$ nahe x_0 mit $f(x_0+h) = f(x_0)$, dann gilt $F'(x_0) = 0$ und die Formel ist für Folgen $h \to 0$ mit $F(x_0+h) = F(x_0)$ ebenfalls gültig.