(3.5.6) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

$a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$ Beweis: $a((-b)+b) = a(-b)+ab$

eind. des Negativen.

$\Rightarrow \quad (-a)\cdot(-b) = -(a\cdot(-b)) = -(-(ab)) = ab.$

$(K,+,\cdot)$ Körper

Existenz der Eins $\exists 1 \; K\setminus\{0\}, (1\neq 0)$

s.d. $a\cdot 1 = a \quad \forall a\in K$

3.6. Allgemeine Assoziativ- und Kommutativgesetze

Sind $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

Dann definieren wir für $n \geq 3$

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n = (\dots((a_1+a_2)+a_3)+\dots)+a_n$

Bemerkung: Bei der Summenbildung kommt es nicht auf die Klammerung an. Jede andere vollst. Klammerung gibt das gleiche Ergebnis.

Beweis: Induktion nach n.

Der Fall $n=3$ ist Assoziativgesetz $a_1+(a_2+a_3) = (a_1+a_2)+a_3$

Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$

Sei $(a_1+a_2+\dots+a_k)+(a_{k+1}+\dots+a_n)$ die äußerste Klammerung.

Dann kommt es innerhalb der äußeren Klammerung nicht an.

nach Induktionsvoraussetzung

$(a_1+\dots+a_k)+(a_{k+1}+\dots+a_n)$

$\overset{IV}{=} \underbrace{(\dots((a_1+a_2)+\dots)+a_k)}_{A} + [\underbrace{(\dots(a_{k+1}+a_{k+2})+\dots)}_{B} + \underset{C}{a_n}]$

$= [((\dots(a_1+a_2)+\dots)+a_k)+(\dots(a_{k+1}+a_{k+2})+\dots)]+a_n$

$\overset{IV}{=} ((\dots(a_1+a_2)+\dots \quad)+a_{n-1})+a_n$ wie gewünscht.

Kombiniert mit Kommutativgesetzen erhalten wir: $\{i_1, i_2, \dots i_n\} = \{1,\dots,n\}$

Dann gilt $a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_n} = a_1+\dots+a_n$

Wir werden dies häufig verwenden wir z.B. in der Form

a_{ij}; $1\leq i\leq n$; $1\leq j \leq m$ seien $n\cdot m$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Bew Induktion nach n und m.

3.7. Allgemeines Distributivgesetz

a_i, b_j reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j \quad \square$$

3.8. Potenzen Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ definieren wir

$a^0 = 1$

$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$

$a^{-n} = (a^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Damit a^m für $m \in \mathbb{Z}$ definiert.

Es gilt

(3.8.1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(3.8.2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(3.8.3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ wegen den Kommutativgesetzen

3.9. Beispiel Jeder Körper hat wenigstens 2 Elemente: 0 und 1

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit Verknüpfungstafel

+	0	1
0	0	1
1	1	

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$-1 = 1 \in \mathbb{F}_2$ Die übrigen Axiome überprüft man mit etwas Fleiß leicht.

Man kann also aus Körperaxiomen von $\mathbb{R}$ nicht auf $-1 \neq 1$ schließen. Um $\mathbb{R}$ zu charakterisieren, brauchen weitere Axiome.

§4. Die Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ gelten nicht nur die Körperaxiome sondern wir haben auch eine Anordnung.

4.1. Definition Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Anordnung auf K ist gegeben durch eine Teilmenge P von positiven Elementen $a \in P$ schreiben $a > 0$ so dass folgende Axiome erfüllt sind.

A1) Für jedes $a \in K$ ist genau eine der folgenden Aussagen wahr.

$a>0$, $a=0$, oder $-a>0$.

A2) $a, b>0 \Rightarrow a\cdot b>0$

A3) $a, b>0 \Rightarrow a+b>0$

Hat man eine Anordnung auf K, dann definiert man allg.

$$a>b :\Leftrightarrow a-b>0$$

und

$$a\geq b :\Leftrightarrow a>b \text{ oder } a=b$$

4.2 Beispiele $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit $P=\mathbb{R}_{>0}$ ist ein angeordneter Körper

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ebenso.

Endliche Körper, d.h. Körper mit nur endlichen vielen Elementen lassen sich nicht anordnen (Wie wir noch sehen werden)

4.3. Folgerungen

Sei $(K, +, \cdot), >$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1) $1>0$ und $0>-1$

2) $\geq$ und $>$ sind transitiv

$a \underset{(}{\geq} b$, $b \underset{(}{\geq} c \Rightarrow a \underset{(}{\geq} c$

3) $a\geq b$ und $x\geq y \Rightarrow a+x\geq b+y$

4) $a\geq b>0$ und $x\geq y>0 \Rightarrow ax\geq by>0$

5) $a\geq b>0$, $c<0 \Rightarrow 0>bc>ac$.

6) $a\geq b>0 \Rightarrow \frac{1}{b}\geq\frac{1}{a}>0$

$0>a\geq b \Rightarrow 0>\frac{1}{b}\geq\frac{1}{a}$

7) Für jedes $x\in K$ gilt: $x^2\geq 0$

Beweis: Zunächst 7) $x=0$ so ist $x^2=0$.

Sei $x\neq 0$ Dann gilt $x>0$ oder $-x>0$

$\Rightarrow x^2>0$ oder $(-x)^2>0$

$x^2>0$

Also $x^2\geq 0$ gilt immer.

1) $1=1^2\geq 0$ nach 7) und $1\neq 0 \Rightarrow 1\neq 0$

$\Rightarrow -1<0$ denn sonst ~~wäre~~ $(-1)>0 \Rightarrow 0=1+(-1)>0$ nach A2 $\lightning$)

2) $a-b \ge 0,\ b-c \ge 0 \overset{A2}{\Rightarrow} \underbrace{(a-b)+(b-c)}_{a-c} \ge 0$

3) $a-b \ge 0,\ x-y \ge 0 \Rightarrow a-b+x-y \ge 0$

$\Leftrightarrow a+x \ge b+y$

4) $a-b \ge 0,\ x > 0 \overset{A3}{\Rightarrow} (a-b)x > 0$

$\Rightarrow ax \ge bx$

$b > 0;\ x-y \ge 0$

$\Rightarrow b(x-y) \ge 0$

transitiv: $ax \ge bx \ge by$

$\Rightarrow ax \ge by > 0$

5) $a-b \ge 0,\ -c > 0$

$-ac + bc \ge 0$

$\Rightarrow bc \ge ac$ und bc.

6) $a \ge b > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a} \ne 0$ und $-\frac{1}{a} > 0$ gilt nicht, denn sonst $-1 = -\frac{1}{a} \cdot a > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a} > 0,\ \frac{1}{b} > 0 \quad c = \frac{1}{a \cdot b}$

5) $\Rightarrow ac \ge bc > 0$

$\frac{1}{b} \ge \frac{1}{a} > 0$

und der letzte Teil bleibt ihnen überlassen.

4.6. Satz

Sei $(K,+,\cdot),>$, ein geordneter Körper, $1_K \in K$ bezeichnet das Einselement in K. Dann ist die Abbildung $\mathbb{N} \to K$, $n \mapsto \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{n-\text{Summanden}}$ injektiv.

Beweis: K beliebiger Körper

$\mathbb{N} \to K,\ n \mapsto \sum_{i=1}^{n} 1_K = n \cdot 1_K$ definiert.

Ist K angeordnet, also $1_K > 0$

$\Rightarrow n \cdot 1_K > 0$

$\mathbb{N} \to K$ muss dann injektiv sein. Angenommen $n \cdot 1_K = m \cdot 1_K$

$n \mapsto n \cdot 1_K$ Für $n > m \in \mathbb{N} \Rightarrow \overset{>0}{(n-m)} 1_K = n 1_K - m 1_K = 0$ ↯ □

Also

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \hookrightarrow K,\ n \mapsto n \cdot 1_K \text{ ist injektiv} \\ \cap \nearrow \\ \mathbb{Z} \end{array}$$

Wir können fortsetzen, für $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir:

$m 1_K = -((-m) 1_K)$

Im Folgenden werden werden wir in $\mathbb{Z}$ und $\{n \cdot 1_K \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset K$ für angeordnete Körper identifizieren.

<u>Bem.</u>: Endliche Körper lassen sich also nicht anordnen.

$\mathbb{N} \to K$

$n \mapsto n 1_K$ kann nicht injektiv sein nach Schubfachprinzip.

<u>4.7 Definition</u> (Archimedisches Axiom)

Ein angeordneter Körper K heißt <u>archimedisch</u> wenn

$\forall a \in K\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $a < n (= n \cdot 1_K)$

<u>Bsp</u>: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind archimedisch angeordnete Körper.

Kein Beispiel für einen nicht archimedisch angeordneten Körper können wir im Moment konstruieren.