11.8 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar, streng monoton, $J = f(I)$, $f^{-1}: J \to I \subset \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$, $y_0 = f(x_0)$. Dann ist f^{-1} in y_0 diffbar und es gilt: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis: Zunächst die Formel:

Da $f \circ f^{-1} = id_J$ gilt: $(f \circ f^{-1})' = 1$

$\overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0)$

$= f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0)$. $f'(x_0) \neq 0$ ist notwendig für die Diffbarkeit von f^{-1} und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Nach Voraussetzung ist $f'(x_0) \neq 0$. Also $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq 0$ für $h \neq 0$ und genügend klein. $x = x_0 + h$ dann gilt mit $x \to x_0$ auch $y \to y_0$ und umgekehrt: $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow[\substack{y \to y_0 \\ \text{bzw. } x \to x_0}]{} \frac{1}{f'(x_0)}$ die Formel. $\square$

Beispiel:

$f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ auf $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Umkehrfunktion $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \longmapsto \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$. $g'(x) = \frac{1}{k(\sqrt[k]{x})^{k-1}} = \frac{1}{k} x^{\left(\frac{1}{k} - 1\right)}$.

Für $k > 1$ ist $g(x) = \sqrt[k]{x}$ in $x_0 = 0$ nicht diffbar.

12. Lokale Extrema und Mittelwertsatz

12.1. Definition

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein lok. Maximum (Minimum), wenn ein $h > 0$ existiert, sodass $]x_0 - h; x_0 + h[\subset I$ und $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in]x_0 - h; x_0 + h[$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$).

f hat in x_0 ein lokales Extremum, wenn f in x_0 ein lokales Max. oder Min. hat. Gilt außerdem $f(x_0) \neq f(x)$ $\forall x \in]x_0 - h; x_0 + h[$ mit $x \neq x_0$ so spricht man von einem isolierten Extremum.

12.2. Satz

Hat $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ in x_0 ein lok. Ex. und gilt f ist in x_0 diff diffbar, dann gilt: $f'(x_0)=0$.

__Beweis:__ Wir betrachten den Fall eines lok. Max.. Es gilt $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ für $x<x_0$ nahe x_0 und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ für $x>x_0$ nahe x_0. Es folgt: $0 \leq f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. □

__Bemerkung:__

$f'(x_0)$ ist eine notw. Bed. für ein lok. Ex. aber nicht hinreichend.

Beispiel: $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$ hat eine NST in $x_0=0$ welche kein lok. Ex. ist.

__12.3 Satz (von Rolle)__

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige in $]a;b[$ diffbare Fkt. mit $f(a)=f(b)$. Dann existiert ein $\psi\in]a,b[$ mit $f'(\psi)=0$.

__Beweis:__ f nimmt auf $[a,b]$ Max. und Min. an. Sind Max. und Min. gleich, dann ist f konstant und $f'(x)=0$ $\forall x\in]a;b[$. Andernfalls wird das Max. oder das Min. im Inneren $]a,b[$ des Intervalls angenommen, etwa in ψ. ψ ist ein ψ lok. Ex., weil es ein glob. Ex. ist und daher: $f'(\psi)=0$. □

__12.4 Mittelwertsatz (Corollar)__

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$ stetig in $]a;b[$ diffbar. Dann existiert ein $\psi\in]a,b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\psi)$

__Beweis:__ Wir betrachten die Funktion $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ und wenden den Satz von Rolle an: $F(a)=f(a)\overset{!}{=}F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$. Also $\exists\,\psi$ mit:
$0=F'(\psi)=f'(\psi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

__12.5 Corollar__

Sei $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ stetig, in $]a;b[$ diffbar. Für die Ableitung $f'(x)$ gelte: $m\leq f'(x)\leq M$ für Konstanten $m,M\in\mathbb{R}$. Dann gilt für alle x,y mit $a\leq x\leq y\leq b$: $m(y-x)\leq f(y)-f(x)\leq M(y-x)$

__Beweis:__ Nach dem MWS gilt $m\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq M$. □

12.6 Corollar

$F: [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a;b[$ diffbar.

a) Ist $F'(x) = 0 \ \forall x \in]a;b[$ dann ist f konstant.

b) Ist $F'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a;b[$ dann ist f streng monoton.

Beweis:

a) $0 \leq F(y) - f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = f(y) = c \Rightarrow$ konstant.

b) $f(x) = f(y)$ für $x \neq y \Rightarrow \exists \psi$ mit $f'(\psi) = 0 \Rightarrow$ Widerspruch.

Also ist f injektiv. $\rightsquigarrow$ streng monoton (unter Verwendung des ZWS). □

12.7 Definition

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und ist die Ableitung $f': I \to \mathbb{R}$ ebenfalls diffbar dann heißt f 2x diffbar und $f'' = (f')'$. Allgemeiner: f heißt n-mal diffbar, wenn f $(n-1)$-mal diffbar und $f^{(n-1)}$ diffbar, wobei $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

12.8. Satz (Hinreichendes Krit. für lok Ex.)

Sei $f:]a;b[$ 2 mal diffbar und $x_0 \in]a;b[$ ein Punkt mit $F'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$. Dann hat f in x_0 ein isoliertes lok. Ex., genauer $F'(x_0) = 0$, $F''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lok. Max. und $f'(x_0) = 0$, $F''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lok. Min.

Beweis: $F'(x_0) = 0$, $F''(x_0) < 0$.

$$\frac{F'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x \in]x_0 - h, x_0 + h[\ x \neq x_0, h$$

genügend klein.

$\Rightarrow f'(x) < 0$ für x mit $x_0 < x < x_0 + h$, $f'(x) > 0$ für x mit $x_0 - h < x < x_0$ $\Rightarrow f$ ist smf auf $[x_0, x_0 + h[$, smw auf $]x_0 - h, x]$ $\Rightarrow F(x_0) \geq F(x) \ \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ und Gleichheit gilt nur für $x = x_0$. □

12.9. Definition

Sei $f:]a;b[\to \mathbb{R}$, 3 mal diffbar, $x_0 \in]a;b[$, $F''(x_0) = 0$, $F'''(x_0) \neq 0$. Dann heißt x_0 ein Wendepunkt von f.

Die Funktion ändert sich in x_0 von konkav zu konvex.

12.10 Definition

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Wenn für $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in [0;1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$ gilt, heißt

f konvex. f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.