Die Fourier-Koeff. bilden eine NF (FK. von stetig diffbar. period. NF)

20.2 Satz

Sei: $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar., $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $F(k) = \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$, $\lim_{k\to\infty} F(k) = 0$.

Beweis:

Für $k \neq 0$ $F(k) = -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos(kx)}{k}\,dx$

Wenn $|f(x)| \le M$ und $|f'(x)| \le M$ $\forall x \in [a;b]$ $F(k) \le \frac{2M}{k} + M\frac{(b-a)}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. □

20.3 Fourier-Reihe der Zackenfkt.

Die Zackenfkt $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $G(0)=0$, $G(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $x \in]0;2\pi[$ und $G(x + 2\pi \cdot k) = G(x)$ $\forall x, (k \in \mathbb{N})$.

Die Fourier-koef. sind $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(x)\cos(kx)\,dx = 0$.

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x\frac{\cos(kx)}{k}\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx = \frac{1}{k}$. Also die Fourier-Reihe von G mit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. Wir zeigen, dass diese FR punktweise konv. gegen G. Für $x=0$ oder Vielfaches von 2π ist die Konv. klar.

Für $x \in]0;2\pi[$ verwenden wir $\frac{\sin(kx)}{k} = \int_\pi^x \cos(kt)\,dt$ und

20.4 Satz (Gaußsche Summe)

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}.$$

Beweis: $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-int}\cdot\sum_{l=0}^{2n} e^{ilt} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-int}\cdot\frac{(1-e^{i(2n+1)t})}{1-e^{ti}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{t}{2}i} - e^{-\frac{t}{2}i}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\cdot k^{-1} = \underbrace{\int_\pi^x \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\cdot\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} - \int_\pi^x \frac{1}{2}\,dt$$

$= \frac{\pi - x}{2}$. Dann folgt:

20.5 Satz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & x \in]0;2\pi[\end{cases}$$

und für $\delta > 0$ ist die Konvergenz auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig.

Beweis:

Da $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ und deren Ableitung auf $[\delta; 2\pi-\delta]$ beschränkt sind, folgt die glm. Konv. mit dem Beweis von 20.2. $\triangleright$

20.5 Anwendung

$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$. Die Konv. ist glm, da $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$. F ist also stetig. Auf $[\delta; 2\pi-\delta]$ ist die Folge der Ableitungen $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\sin(kx)}{k}$ glm. konv., daher ist F auf $]0; 2\pi[$ diffbar und $F'(x) = \frac{x-\pi}{2}$ $\forall x \in]0; 2\pi[$. Es folgt $F(x) = (\frac{x-\pi}{2})^2 + c$ für eine Konst. c. Um c zu berechnen, berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} F(x)dx = \int_0^{2\pi} ((\frac{x-\pi}{2})^2 + c)dx = \frac{(x-\pi)^3}{4\cdot 3}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi c = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi \cdot c$$

$$\int_0^{2\pi} F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = 0 \Rightarrow c = -\frac{\pi^2}{12}$$

20.6. Satz

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = (\frac{x-\pi}{2})^2 - \frac{\pi^2}{12}$ auf $[0; 2\pi]$. Insbesondere $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Für Fourier-Reihen ist weder die punktw. noch die glm. Konv. der beste Konvbegriff. Am geeignetsten ist die „Konv. des quad. Mittels".

20.7 Definition

Es bezeichne $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid$ 2π-period. über $[0; 2\pi]$ Riemann intbar $\}$ den $\mathbb{C}$-VR dieser Fkt. Auf V def. wir ein Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$, d.h. es gilt:

$\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$; $\langle f, g+h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$;

$\langle \lambda f, g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle$, $\langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$. $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$

$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 0$. Aber auf V kann man von $\langle f, f \rangle = 0$ nicht auf $f = 0$ schließen, z.B. für eine Fkt f die auf $[0; 2\pi]$ nur in endlich vielen Punkten $\neq 0$ ist.

Auf dem UR $V^0 = \{ f \in V \mid f = u + vi$ ist stetig$\}$ ist $\langle , \rangle$ ein Skalarprod. im Sinne der L.A. und $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ist die zugehörige Norm. Auf ganz V gilt $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ Δ-Ungl.

$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ Cauchy-Schwarzsche-Ungl.

Die Fkt e_k mit $e_k(x) = e^{ikx} \in V$ bilden ein Orthonormalsystem $\langle e_k, e_l\rangle = \begin{cases} 0 & k\neq l \\ 1 & k=l \end{cases}$ und die Fourier-Koef von f in V sind $c_k = \langle e_k, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx$.

<u>20.8 Satz</u> (Pythagoras)

Die Fkt $f \in V$ habe die Fk c_k. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$.

<u>Beweis:</u>

$g = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$. Dann gilt $\langle f, g\rangle = \sum c_k \langle f, e_k\rangle = \sum c_k \overline{c_k}$
$= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. $\langle g, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n} \overline{c_k} c_l \langle e_k, e_l\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

$0 \le \|f-g\|_2^2 = \langle f,f\rangle - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|_2^2 + \sum |c_k|^2(-1-1+1)$

$\Rightarrow \|f-g\|_2^2 = \|f\|_2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. bzw $\langle f-g, g\rangle = 0$ d.h. $f \perp g$

und Pythagoras $\|f\|_2^2 = \|f-g\|_2^2 + \|g\|_2^2$. $\square$

<u>20.9. Satz</u> (Besselsche Ungleichung)

$f \in V$ mit Fk c_k. Dann gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|_2^2$.

<u>Beweis:</u>

Der Satz zuvor sagt $\sum |c_k|^2 \le \|f\|_2^2$. Die Reihe Konv. also und genügt der Beh. Schranke. $\square$

<u>20.10 Definition</u>

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-per., intbar über $[0; 2\pi]$. Die Folge (f_n) konv. im quad. Mittel gegen f, wenn $\lim_n \|f - f_n\|_2 = 0$.

Äquivalent wenn $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt.

Folgerung aus der Besselschen Ungl.: Die FR von f konv. im quad. Mittel gegen $f \Leftrightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ gilt.

<u>Beispiel:</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ konv. im quad. Mittel gegen die Zacken fkt. G mit $G(x) = \frac{\pi - x}{2}$ auf $]0; 2\pi[$. In der Tat $a_k = 0$, $b_k = \frac{1}{k}$, $\forall k \ge 0$

$(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Also $c_k = \frac{a_k - b_k i}{2}$, $k \ge 1$, $c_k = \frac{a_k + b_k i}{2}$, $k \le -1$

$c_k = \frac{-i}{2k}$, $c_k = \frac{i}{2k}$, $k \ge 1$ und $c_0 = 0$. Also $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Andererseits $\|G\|_2^2 = \langle G, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{-(\pi - x)^3}{3 \cdot 4} \right|_0^{2\pi}$
$= \frac{\pi^2}{12}.$

<u>20.11. Satz</u>

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-per. über $[0; 2\pi]$ intbar. Dann konv. die FR von f im quad. Mittel gegen f. Mit andren Worten: Es gilt die Vollständigkeitsrelation $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ für die FRK. Die Vollst.rel. besagt $f \in V$ mit $f \perp e_k \Leftrightarrow \langle e_k, f \rangle = 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \|f\|_2^2 = 0$. $\tilde{V} = V / \{ f \in V \mid \|f\|_2 = 0 \}$ $\langle , \rangle$ induziert auf $\tilde{V}$ ein Sk. prod.