Analysis I

Igor Schlegel

Archimedisches Axiom (Definition)

Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch, wenn zu jedem $a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a < n$ $(1_K \cdot n)$. $(\mathbb{N} \hookrightarrow K)$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ archimedisch.

4.8. Satz

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper, dann gilt:

1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ so dass $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt.

2) Für $b > 1$ gilt: $\forall a \in K \; \exists n \in \mathbb{N}: a < b^n$

3) Für $0 < b < 1$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}: 0 < b^n < \varepsilon$

Beweis: Zu 1)

Betrachten wir $a = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$.

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{a} = \varepsilon$

Zu 2) Wir zeigen zunächst, dass für alle $x > 0$

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ gilt:

Binomische Formel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx.$$

Sei $b > 1$, $x = b - 1 > 0$, $b^n = (1+x)^n \geq 1 + xn$

$\Rightarrow b^n - 1 \geq nx > a - 1$, falls $\frac{a-1}{x} < n$

So ein n existiert nach AA. $b^n > a$

3) Folgt aus 2) angewandt auf $\tilde{b} = \frac{1}{b} > 1$

$a = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. $\square$

4.9. Bemerkung

Will man Strecken messen, dann reichen rationale Zahlen nicht aus.

Bsp 1) Nach Pythagoras hat die Diagonale im Quadrat mit Kantenlänge 1.

$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$

Bew: Angenommen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $q, p \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

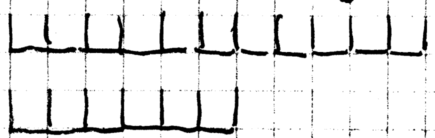
$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ ist gerade $\Rightarrow p$ ist gerade

$q = 2 \cdot q_1 \Rightarrow 4q_1^2 = 2p^2 \Rightarrow 2q_1^2 = p^2$

$\Rightarrow p$ ist gerade, ein Widerspruch zu p, q_1 Teilerfremd.

Bsp 2)

Def: Zwei Strecken a und b heißen kommensurabel, wenn es eine Strecke d gibt und Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ so $n \cdot d = a$, $m \cdot d = b$ gilt. Definieren wir $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$



$$\left.\begin{array}{l} a = 11 \cdot d \\ b = 6 \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{11}{6}$$

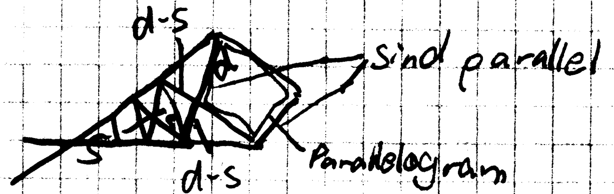
Gibt es gemeinsame Teilstrecke d, so läßt sich ein d Finden indem man die kleinere Strecke m der Größeren anhängt;

$c = a - b = 5d$

$b - c = d$ wie in userem Beispiel

Dieser Algorithmus terminiert, wenn a und b kommensurabel sind.

Satz: Die Diagonale d und die Seite s im regulären 5-Ecke sind nicht kommensurabel (=inkommensurabel).



$$x = \frac{d}{s} = \frac{s}{d-s} = \frac{1}{\frac{d}{s} - 1}$$

$$x = \frac{1}{x-1} \Rightarrow (x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} (\pm) \sqrt{5} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$ goldener Schnitt.

Thales (624–546, BC)

Pythagoras (570 – 495, BC)

Eudoxos (408 - 355, BC)

Euklid (325 - 265, BC)

Archimedes (287 - 212, BC)

Erastothenes (276 - 195, BC)

Hypatia (~350 - 415, AD)

Newton (1642 - 1727, AD)

Berkeley (1685 - 1753)

Cauchy (1785 - 1857)

Dedekindt (1831 - 1906)

5. Konvergenz

Korergenz ist die zentrale Idee der Analysis!

5.1 Definition

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_{\geq 1} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$

Üblicherweise geben wir der Abbildung keinen Namen sondern verwenden die Indexnotation (a_n)

<u>Beispiele</u> 1) $(a_n) = (\frac{1}{n})$

2) $(a_n) = (2^n)$

In Intelligenztests wird die Frage der Mustererkennung in Anfangsteilen einer Folge gestellt.

3) $(2, 4, 3, 6, 5, 10, 9, \ldots)$ Raten soll man hier ein rekursives Bindungsgesetz hier:

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} \cdot 2 &, n \% 2 = 0 \\ a_{n-1} - 1 &, n \% 2 = 1 \end{cases}$$

Bsp: $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

die Folge der Fibonacci-Zahlen. Hier ist das Bindungsgesetz

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

Für andere Folgen kann das schwierig sein

$(a_n) = (1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, \ldots) \Rightarrow (a_n) = (n\text{-te PZ} - 1)$

Etwas einfacher $(a_n + 1)$

$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots)$

In der Analysis werden Folgen für andere Zwecke verwendet: Wir approximieren eine reelle Zahl a duch eine Folge (a_n) immer besser:

$(3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \ldots)$

gibt immer bessere Approximation der Kreiszahl π. Wir geben dieser Idee eine präzise Bedeutung.

5.2. Definition

Sei a_n eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge

(a_n) heißt konvergent, (in Zeich. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$) wenn $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$ sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.

Folgen die nicht konvergieren heißen divergent.
a heißt Grenzwert oder limes der Folge (a_n).

Beispiele: $(a_n) = (\frac{1}{n})$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

In der Tat für $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ nach dem AA, sodass $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Für alle $n \geq n_0$ gilt daher:

$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, denn

$|\frac{n-1}{n} - 1| = |\frac{-1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

3) Jede konstante Folge (a_n) mit $a_n = a$ für alle n konvergiert gegen a.

5.3 Satz (Rechenregeln für GW)

Es seien (a_n), (b_n) zwei konvergierende Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

1) Die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ sind ebenfalls konvergent und

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \overset{=a+b}{\vee}$ bzw.

$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$

2) Ist $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, dann ist auch $(\frac{1}{b_n})$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Ferner ist in diesem Fall auch $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent und es gilt

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

Bsp: $c_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

$= \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{a_n}{b_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim 1 + \lim(\frac{2}{n}) + \lim \frac{-1}{n^2}$

$= 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0^2$

$\lim b_n = 2 - 1 \cdot 0^2 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$