Igor Schlegel

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Komplexe Zahlenebene.

$i^2 = -1$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$

9.2. Satz + Definition

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Zu $z = a + bi$ heißt $a = Re(z)$ = Realteil von z. $b = Im(z)$ = Imaginärteil von z. $\bar{z} = a - bi$ das komplex Konjugierte und $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ wobei $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ der Betrag von z ist.

Das Inverselement zu $z = a + bi \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot i$. $\square$

Beweis: Assoziativ-, Kommutativ, Distributivgesetze folgen mit Nachrechnen aus den entsprechenden Gesetzen für $\mathbb{R}$.

$0 = 0 + i \cdot 0$ ist das Nullelement, $-z = -a - bi$ ist das Negative zu $a + bi = z$. $1 = 1 + i \cdot 0$ ist das Einselement, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$ ist das Inverse zu $z = a + bi \neq 0$ da $\frac{1}{z} \cdot z = \frac{\bar{z} \cdot z}{z\bar{z}} = \frac{z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 1$ $\square$

9.3. Satz

Konjugation $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und der Betrag erfüllen

0) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Δ-Ungleichung

Beweis:

0), 1) Klar!

2) $|z \cdot w|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z} w\bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$. $\sqrt{\ }$ anwenden gibt die Behauptung.

3) $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$

$= |z|^2 + 2 Re(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2$

$= (|z| + |w|)^2$. Monotonie der Wurzel gibt die Behauptung. $\square$

Grenzwerte in $\mathbb{C}$

9.4. Definition

Sei (z_n) eine komplexzahlige Folge, $z \in \mathbb{C}$ eine weitere komplexe Zahl. (z_n) konvergiert gegen z, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Schreibweise $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Äquivalent ist, dass die Teil-Folgen der Reelteile und Imaginärteile konvergieren.

$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim Re(z) = Re(z), \lim Im(z) = Im(z)$.

Beweis: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$

$$\cap$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid (|Re(z)| < r) \wedge (|Im(z)| < r)\}$$

$$\cap$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \sqrt{2} \cdot r\} \square$$

9.5. Definition + Satz (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen ist eine Cauchy-Folge wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ |z_m - z_n| < \varepsilon\ \forall m, n \geq n_0$. Jede Cauchy-Folge (z_n) komplexer Zahlen hat einen GW $z \in \mathbb{C}$.

Beweis:

Folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ durch betrachten der Realteil- und Imaginärteil-Folge. $\square$

Der mathematische Hauptgrund zu betrachten ist

9.6. Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq$ mit komplexen Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$, $(a_n \neq 0)$ dann hat F in $\mathbb{C}$ (wenigstens) eine Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$.

Mit anderen Worten: Die Gleichung $F(z) = 0$ hat wenigstens eine Lösung.

9.7 Korollar

Sei $F(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ ein Polynom von Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann hat, mit Vielfachheit gezählt, F genau n NST.

Mit anderen Worten: $F(z) = a_n \prod_{j=1}^{l} (z - z_j)^{m_j}$ wobei $z_1, \ldots, z_j$ die Paarweise versch. NST sind, $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $\sum_{j=1}^{l} m_j = n$.

m_j heißt Vielfachheit der Nullstelle z_j von F.

Beweis:

z_1 NST von F, Division mit Rest von Polynomen $F(z) = g(z)(z-z_1) + F(z_1) = g(z)(z-z_1)$ wobei $g(z)$ ein Polynom vom Grad $(n-1)$ ist. Iteration und Zusammenfassen von Faktoren liefert die Behauptung. $\square$

9.8 Korollar

Sei: $F(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann ist mit $z \in \mathbb{C}$ eine NST von F auch $\bar{z}$ eine NST von F. F zerlegt sich $F(x) = a_0 q_1(x) \cdot \ldots q_r(x) l_1(x) \ldots l_s(x)$ wobei:
$q_j(x) = (x - z_j)(z - \bar{z}_j) = x^2 - 2Re(z_j) + |z_j|^2$ ein quad. reelles Polynom ohne reelle NST und $l_k(x) = (x - x_k)$ ein lineares Polynom ist und es gilt: $2r + s = n$.

Beweis:

$0 = \bar{0} = \overline{F(z)} = \overline{(a_n z^n + \ldots + a_0)} = \bar{a}_n \bar{z}^n + \ldots + \bar{a}_0 \underset{a_j \in \mathbb{R}}{=} a_n \bar{z}^n + \ldots + a_0$

Also $F(z) = 0 \Leftrightarrow F(\bar{z}) = 0$. Der Rest ist klar.

Der Fundamentalsatz der Algebra wurde von Gauß in seiner Dessertation gezeigt. Wir werden diesen Satz in der Funktionentheorievorlesung beweisen.

Ein Nachteil von $\mathbb{C}$ gegenüber $\mathbb{R}$ ist: $\mathbb{C}$ lässt sich nicht anordnen, d.h. $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper.

Beweis: A $>$ ist eine Anordnung. Dann gilt $i > 0$ oder $-i > 0$
$\Rightarrow -1 = i^2 = (-i)^2 > 0 \Rightarrow 1 + (-1) = 0 > 0$ ↯.

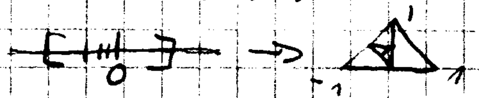
Gibt es mehr komplexe Zahlen als reelle Zahlen? $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.
Auch im Sinne der Mengenlehre?

9.10 Satz

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind gleichmächtig.

Bew.: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto Re(z)$ zeigt $\mathbb{C}$ ist wenigstens so mächtig wie $\mathbb{R}$. Wir konstruieren eine surjektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und schließen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichmächtig sind. Da $\mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung von Intervalle mit Durchmesser 2 und $\mathbb{C}$ abzählbare

Vereinigung m Dreiecke, der konvergent zu dem Δ mit Ecken $-1, 1, i$ reicht es eine surjektive Abbildung



. Dies geht mit einer „Piano-Kurve". Jeder Punkt $x \in [-1; 1]$ liegt in (wenigstens) einer Folge von abgeschlossenen Intervallen (I_n) wie skizziert. Es sei die zugehörige Folge abgeschlossener Dreiecke in $\mathbb{C}$. Es gibt genau einen Punkt $z \in \Delta$ sodass $\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Wir definieren $\varphi(x) := z$. Die Abbildung ist wohldefiniert auch für Punkte $x = \frac{a}{2^n}$ mit $-2^n < a < 2^n$, $a \in \mathbb{Z}$ die in zwei dieser Intervallschachtelung liegen, da das Bild nicht davon abhängt, ob wir die „linke" oder „rechte" Folge nehmen. φ ist surjektiv und sogar stetig. φ ist nicht bijektiv. $\square$

<u>Reihen von komplexen Zahlen</u>

<u>9.11 Definition</u>

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ von komplexen Zahlen heißt konvergen (absolut konvergent), wenn die Folge der Partialsummen konvergiert (bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, [$\Rightarrow \sum |a_n|$ konvergiert, da monoton wachsend]).
Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz (Cauchy-Krit + Δ-Ungl.)
Die Umkehrung gilt nicht.

<u>9.12 Definition + Satz</u>

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine Reihe pos. reeller Zahlen heißt Majorante von $\sum a_n$, wenn $0 \leq |a_n| \leq b_n$ $\forall n$ erfüllt ist. Majorantenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Bemerkung: Das Quotientenkrit. und Wurzelkrit. zeigen jeweils die abs. Konvergenz.

<u>9.13 Definition.</u>

Sei (a_n) eine Folge reeller (komplexer) Zahlen $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw $z_0 \in \mathbb{C}$) ein Punkt. Eine Reihe der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$)

heißt reelle (komplexe) Potenzreihe. Offenbar sind die reellen ein Spezialfall der Komplexen.

9.14 Satz

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Konvergiert die Reihe für $z = z_1$, dann konvergiert die Reihe für alle z mit $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ absolut.

9.15 Korollar

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann existiert ein $R \in [0, \infty]$, sodass $f(z)$ $\forall z$ mit $|z-z_0| < R$ konvergiert und $|z-z_0| > R$ divergiert. R heißt Konvergenzradius von $f(z)$. Für Punkte z mit $|z-z_0| = R$ kann Konvergenz vorliegen, muss aber nicht.

Beispiele: Betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Für $x = -1$ erhalten wir die alternierende harm. Reihe. Für $x = 1$ die harm. Reihe. Die erste konvergiert, die zweite nicht. $\Rightarrow f(x)$ hat den Konvergenzradius $R = 1$.