20.10 Satz

Sei: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-period. über $[0;2\pi]$ intbar. Dann konv. die Fourier-Reihe von f im quad. Mittel gegen f.

Beweis:

a) Wir betrachten zunächst den Fall einer spez. TreppenFkt.

$F(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<a\\ 0 & a\le x<2\pi\end{cases}$. Die FK von f sind $c_0=\frac{a}{2\pi}$, $c_k=\frac{1}{2\pi}$

$\int_0^a e^{-ikx}dx=\frac{i}{2\pi k}e^{-ikx}\Big|_0^a=\frac{i}{2\pi k}(e^{-ika}-1)\quad k\neq 0.$

Für $k\neq 0$ $|c_k|^2=\frac{1}{4\pi^2k^2}(1-e^{ika})(1-e^{-ika})=\frac{1}{2\pi^2k^2}(1-\cos(ka))$

Also $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=\frac{a^2}{4\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(ka)}{\pi^2k^2}=\frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(ka)}{k^2}$

$=\frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{(\pi-a)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\right]=\frac{a}{2\pi}=\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1^2dx$

$\Rightarrow$ Für f gilt die Vollständigkeitsrelation und mit Pythagoras dass die FR von f im quad. Mittel gegen f konv.

b) f beliebige Trp.Fkt auf $[0;2\pi]$. Dann existieren spez. Trp.fkt. $f_1,\dots,f_r$ und $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ wie a).

so $f(x)=\sum_{j=1}^{r}\gamma_j f_j(x)$ außer im eventuell endlich im $[0;2\pi]$.

Für die FSumme S_n bzw. S_{jn} von f bzw f_λ gilt:

$\|f-S_n\|_2=\|\sum_{j=1}^{r}\gamma_j(f_j-S_{jn})\|_2\le\sum_{j=1}^{r}|\gamma_j|\cdot\|f_j-S_{jn}\|_2\xrightarrow{n\to\infty}0$ (nach a))

Also konv. (S_n) gegen f im quad. Mittel.

c) f beliebige intbare period. Fkt. Wir dürfen annehmen dass f reellwertig ist und $|f|\le 1$. Zu $\varepsilon>0$ gibt es TreppenFkt. φ,ψ auf $[0;2\pi]$ mit 1) $-1\le\varphi\le f\le\psi\le 1$ auf $[0;2\pi]$

2) $\int_0^{2\pi}(\psi-\varphi)dx\le\frac{\pi}{4}\varepsilon^2$. Setzen $g=f-\varphi\ge 0$. Dann gilt

$|g|^2\le|\psi-\varphi|^2\le 2|\psi-\varphi|$. Also $\|g\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g|^2dx\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\psi-\varphi)dx$

$\le\frac{\varepsilon^2}{4}$, $\|g\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$. Es seien $S_{f,n}$, S_{g_n}, $S_{\varphi n}$ die n-te FS. von f,g,φ. Nach Teil b) ex. n_0 s.d. $\|\varphi-S_{\varphi,n}\|_2\le\frac{\varepsilon}{2}\ \forall n\ge n_0$

Nach Pythagoras gilt $\|g-S_{gn}\|_2^2=\|g\|_2^2-\|S_{gn}\|_2^2\le\|g\|_2^2<\frac{\varepsilon^2}{4}$

Also $\|f-S_{f_n}\|_2\le\|\varphi-S_{n\varphi}\|_2+\|g-S_{gn}\|_2\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \forall n\ge n_0$

20.11. Satz

Sei: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine stetige 2π-period. stückweise stetig diffbare

Funktion (d.h. $\exists$ Unterteilung $t_0 = 0 \ldots t_n = 2\pi$, sodass $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig diffbar ist). Dann konv. die FR von f glm ggn f.

Beweis:

Es sei $\varphi_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}$ die Ableitung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-period. Fkt mit $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j[} = \varphi_j|_{[t_{j-1}, t_j[}$

Für die FK γ_k von φ gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 < a$ nach der Besselschen Ungleichung. Für $k \neq 0$ lassen sich die FK c_k von f wie folgt berechnen $\int^{t_j} f(x) e^{-ikx} = \frac{i}{k}[f(x)e^{-ikx}|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x) e^{-ikx} dx]$

also $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} = \sum_{j=1}^{r} \frac{i}{2\pi k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x) e^{-ikx} dx = \frac{i}{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx e^{-ikx} = \frac{i}{k}\gamma_k$

Nun gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Also $|c_k| = |\frac{i\gamma_k}{k}|$ $\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2) \Rightarrow$ Die Folge $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ konv. absolut und daher konv. die Fourier-Reihen glm. Die Grenzfkt. g ist eine stetige Fkt und die FR von f und g stimmen überein. Ferner konv. die FR im quad. Mittel gegen f und g. Also

$0 = \|f - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\underbrace{f(x) - g(x)}_{\text{stetig}}|^2 dx \Rightarrow f = g$ $\square$.

20.12. Definition

Ein $\mathbb{C}/\mathbb{R}$-VR H zusammen mit einem Skalarprod. $\langle , \rangle : H \times H \to H$ so dann $\| f \|_2^2 = \langle f, f \rangle \geq 0$ und $= 0$, nur wenn $f = 0$ heißt PHR. H heißt HR, wenn H zusätzl. vollst. ist, d.h. jede Cauchyfolge in H bzgl. $\| \|_2$ konv.

(f_n) Folge ist Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein N ex. so daß $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$. (f_n) Cauchy-F $\Rightarrow \exists f \in H$ sodass $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \|f_n - f\|_2 < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Bsp: $L^2(\mathbb{C}) = \{ (c_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty \}$. mit SProd. $\langle (c_k), (d_k) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k d_k \in \mathbb{C}$ die Reihe konv. absolut. $\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{c}_k d_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 + |d_k|^2 < \infty$

Satz

$L^2(\mathbb{C})$ ist vollst.

Beweisskizze: $c_n = (c_{nk}) \in L^2(\mathbb{C})$ eine Folge von Elem. die Cauchy-F. bilden $(c_n)_n \subseteq H$. Dann sind die $(c_{nk}) \subset \mathbb{C}$ eine CF.

in $\mathbb{C}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: |c_{nk} - c_{mk}|^2 \leq \|c_n - c_m\|_2^2 < \varepsilon\ \forall n \geq N.$

Sei: $\bar{c}_k = \lim_{n\to\infty} c_{nk}$ ex. da $\mathbb{C}$ vollst. ist. Dann $\bar{c} = (\bar{c}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H$ der GW. $\square$

Bemerkung: 1) H^0 ein PHR, dann können wir H^0 zu HR machen:

$H^0 \hookrightarrow H = \{CF \text{ in } H^0\} / \{NF \text{ in } H^0\}$; $f \mapsto [\text{ konst. Folge } f]$

2) $V^0 := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig, } 2\pi p.\}$ ist PHR.

3) Sei $e_k \in H$ ein abzählb. OrthoS. Dann definiert

$L^2(\mathbb{C}) \to H$, $(c_k) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k$ eine Abb. zw. HR.

Dieser ist surjektiv, genau dann wenn die Vollstrel., wenn

Für $c_k = \langle e_k, f \rangle: \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$ gilt.