12.11. Satz

Sei: $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar auf einem Intervall. f ist konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Beweis:

a) Es sei: $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ ist m.w. $\forall x \in I$. Es seien $x_1 < x_2$ Punkte in I. $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad \lambda \in]0;1[$ also $x_1 < x < x_2$
$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\psi_1) \leq f'(\psi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ mit $\psi_1 \in]x_1;x[$, $\psi_2 \in]x;x_2[$ nach dem MWS. Da $x-x_1 = (1-\lambda)(x_2-x_1)$, $x_2-x = \lambda(x_2-x_1)$ folgt $\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda}$.
$\Rightarrow f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

b) Sei $f(x)$ konvex. Angenommen $\exists x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c = f'(x_0)$ und $\varphi(x) = f(x) - c\cdot(x-x_0)$. Dann gilt $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) < 0 \Rightarrow \varphi$ hat in x_0 ein isoliertes lok. Max. d.h. $\exists h > 0$, sodass $\varphi(x_0+h) < \varphi(x_0) > \varphi(x_0-h)$
$\Rightarrow \varphi(x_0-h) + \varphi(x_0+h) < 2f(x_0)$. Dies widerspricht der Konvexität für $x_1 = x_0-h$, $x_2 = x_0+h$ und $\lambda = \frac{1}{2} = (1-\lambda)$. □

Newtonverfahren zur Bestimmung von NST

Sei: $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann $\exists$ nach dem ZWS eine NST φ von f. Iterationsverfahren mit Startwert x_0 definieren wir: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

12.12 Satz (Newtonverfahren)

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ 2mal diffbar, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und f konvex, d.h. $f''(x) \geq 0$. Dann gilt:

a) Es gibt genau ein $\varphi \in [a;b]$ und $f(\varphi) = 0$.

b) Es sei $x_0 \in [a;b]$ ein Startwert mit $f(x_0) \geq 0$. Dann ist die Folge $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ definiert und $\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi$.

c) Ist $f'(x) \geq c > 0$ und $f''(x) \leq K \quad \forall x \in [\varphi;b]$ so hat man die Abschätzung: $|x_{n+1} - x_n| \leq |\varphi - x_n| \leq \frac{K}{2c}|x_n - x_{n-1}|^2$.
Man sagt, das Newtonverfahren konvergiert quadratisch.

Beweis:

a) $\nexists$ WS $\Rightarrow \exists$ NST

konvex $\Rightarrow$ nur eine NST

b) f konvex $\Rightarrow$ Tangente auf f durch $(x_0, f(x_0))$ liegt unterhalb des Graphen. $\Rightarrow f'$ m.w. $f'(\varphi) \geq 0$, da sonst weitere NST existiert. $\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in [\varphi; b] \Rightarrow$ Schnittpunkt der Tangente an f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ mit $x_n \in [\varphi; b]$ liegt in $]\varphi; x_n] \Rightarrow$ Folge ist definiert und mf für Startwerte $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) \geq 0$. $f'(\varphi) > 0$, da sonst φ ein lok. Min. von f wäre.

c) ☆

13. Spezielle Funktion

13.1. Definition

Die Komplexe exponentialFunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ Konvergenzradius $= \infty$

13.2 Satz (Additionstheorem für exp)

s. 9.21 o. in der Nähe. $\square$

13.3. Corollar

1) $\exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) > 0$

3) Mit $\exp(1) = e$ gilt $e^n = \exp(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

1) $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$.

2) $x \geq 0$ ist $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$, da alle Summanden ≥ 0. Für $x < 0$ folgt $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$.

3) $n = 1$ ist die Aussage klar. $n \geq 0$ folgt mit Induktion nach n: $\exp(n) = \exp(n-1) \cdot \exp(1) = e^{n-1} \cdot e = e^n$. $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ folgt die Aussage mit 2) $\exp(0) = e^0 = 1$. $\square$

Hilfssatz (Fehler Abschätzung für die Exp-Reihe)

Sei: $\exp(z)=\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}+r_{n+1}(z)$

Dann gilt: $|r_{N+1}(z)|\leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ Für $|z|\leq 1+\frac{N}{2}$.

Beweis:

$r_{N+1}(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Wir schätzen ab; $|r_{N+1}(z)|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$
$=\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\left(1+\frac{|z|}{N+2}+\frac{|z|^2}{(N+3)(N+2)}+\dots\right)\leq\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{(N+2)^k}\right)\leq$
$\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2\cdot\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$. $\square$

13.4 Satz

$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist diffbar mit $(\exp')(x)=\exp(x)$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir $\exp'(0)=1$.

$$\frac{\exp(x)-1}{x}=\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n-1}}{n!}}_{1\text{ Für }x\to 0}+\underbrace{\frac{r_{N+1}(x)}{x}}_{0}$$

$$0\leq\left|\frac{r_{N+1}(x)}{x}\right|\leq 2\frac{|x|^N}{(N+1)!}\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h}=\exp(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}=\exp(x_0)$$
$=\exp'(x_0)$. $\square$

13.5 Corollar

$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist sms, konvex.

13.6. Bemerkung

Die Exp.fkt ist aus zwei Gründen wichtig.

1) $y=e^x$ ist eine Lsg der DLG $y'=y$

Genauer:

Satz

Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine diffbare Funktion, deren Ableitung $f'=cf$ für $c\in\mathbb{R}$ (Also $c>0$ ist prop. zum Wert, $c<0$ ist prop. umgekehrt zum Wert.) Dann gilt $f(x)=f(x_0)e^{c(x-x_0)}$ für $x_0\in I$ fest.

Beweis: Wir betrachten $h(x)=f(x)\cdot e^{-cx}$. Dann gilt
$h'(x)=f'(x)\cdot e^{-cx}+f(x)e^{-cx}(-c)=f(x)(ce^{-cx}-ce^{-cx})=0$
$\Rightarrow h$ ist kons. Fkt. $f(x)\cdot e^{-cx}=h(x)=h(x_0)=f(x_0)\cdot e^{-cx_0}\}$

$F(x) = F(x_0)e^{c(x-x_0)}$.

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Also $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$. Der zweite Grund ist $\exp: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ ist ein Gruppenhom., ein Isomorphismus.

13.7 Satz + Definition

$\ln: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bezeichnet die Umkehrabbildung von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und heißt natürlicher Logarithmus. Es gilt: $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. $\ln$ ist diffbar, $(\ln')(x) = \frac{1}{x}$, $\ln$ ist sms, konkav.

Beweis:

$$(\ln')(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}. \quad \square$$