Ana I
Igor Schlegel

Definition

(a_n) Folge reeller Zahlen, $a \in \mathbb{R}$ (a_n) konvergiert gegen a, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.

Definition $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ Betrag von a.

Satz (Dreiecksungleichung)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Beweis: Fallunterscheidung

1) $a \geq 0,\ b \geq 0$
2) $a \geq 0,\ b < 0$
3) $a < 0,\ b \geq 0$
4) $a < 0,\ b < 0$

1) $a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 0$
$\Rightarrow |a+b| = a+b = |a| + |b|$

2) $a \geq 0, b < 0$ $|a| = a,\ |b| = -b$

$|a+b| = \begin{cases} a+b, & a+b \geq 0 \\ -b-a, & a+b < 0 \end{cases}$

$|a+b| \leq \begin{cases} |a| - |b| \leq |a| + |b| & \text{da } -|b| < 0 \leq |b| \\ |b| - |a| \leq |b| + |a| & \text{da } -|a| \leq 0 \leq |a|. \end{cases}$

3, 4 gehen identisch $\square$

5.3 Satz

$(a_n), (b_n)$ heißen konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b.

Dann gilt

1) auch $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n)$ konvergiert und $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$,
$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

2) Sind alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ~~gilt~~ konvergiert auch die Folge der Kehrwerte $(\frac{1}{b_n})$ und $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$.

Insbesondere ?

ist dann auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

Beweis: 1) Wir zeigen $\lim(a_n+b_n) = a+b$.

Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung n_1 und n_2 sodass

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_2$.

Dann $|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \overset{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Wir zeigen $\lim a_n b_n = a \cdot b$.

Es gilt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n \overbrace{- a\cdot b_n + a b_n}^{\text{Nahrhafte Null}} - ab|$$

$$\leq |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| = |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

Zu $\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ $\exists n_1 | b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$

Zu $1 \in \mathbb{R}$ $\exists_n : |b_n - b| < 1\ \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow |b_n| < |b| + 1$

da $|b_n| = |b - b_n + b_n| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |b_n - b| + |b| < |b| + 1$

Zu $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ $\exists n_3 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}\ \forall n \geq n_3$.

Also für $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ gilt dann:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \cdot (|b|+1) + (|a| \quad \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}$.

Wähle n_1 sodass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}\ \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow |b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$

Also für $n \geq n_1$ $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{|b_n - b|}{\frac{|b|^2}{2}}$

Nach Voraussetzung $\exists n_2$ sodass

$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon$. Also für $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ gilt

$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{|b|^2/2 \cdot \varepsilon}{|b|^2/2} = \varepsilon$

Die Konvergenz von $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ folgt durch Kombination

von 1) und dem schon bewiesenen Teil von 2.

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $\square$.

5.4 Satz

Der GW a einer konvergierten Folge (a_n) ist eindeutig bestimmt.

Bew: Angenommen a, a' sind beides GW von (a_n), d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1, n_2 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$, $|a_n - a'| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$.

Dann gilt für $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Also $\forall \varepsilon > 0$ gilt $|a - a'| < 2\varepsilon \Rightarrow a = a'$ □.

6. Das Vollständigkeitsaxiom

Die bisher betrachteten Axiome I.1–I.4, II.1.–II.4, III, A1–A3, AA gelten für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$. Das in diesem § eingeführte Vollst.-Axiom unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, dass die Axiome I, II, III, A, AA, V $\mathbb{R}$ eindeutig charakterisieren.

6.1 Definition

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn Folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

6.2. Satz

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\lim a_n = a$. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein N, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N$.

Also $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \overset{\Delta}{\leq} |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

6.3. Vollständigkeitsaxiom

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

In der Schule haben sie reelle Zahlen vielleicht über Intervallschachtelungen eingeführt.

6.4. Erinnerung (Intervalle)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Dann bezeichnet

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das geschlossene Intervall

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das offene Intervall

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ und

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenen Intervalle mit

Randpunkten a, b. Für jedes dieser Intervalle I heißt $|I| = b-a$ die Länge des Intervalls.

6.5. Definition

Eine Intervallschachtelung (I_n) ist eine Folge abgeschlossener Intervalle (I_n) mit

1) $I_n \supset I_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ und
2) $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$

6.6 Intervallschachtelungs Prinzip

Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es genau eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Bemerkung: abgeschlossen in der Definition der I.S. ist wichtig

$\bigcap_{n=1}^{\infty}]0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

6.7 Satz

Das Vollst. Axiom ist zum Intervallschachtelungsprinzip äquivalent.

Beweis: Wir haben zwei Dinge zu zeigen

1) $VA \Rightarrow ISP$
2) $ISP \Rightarrow VA$

Dabei dürfen wir die Axiome I-III, A, AA verwenden.

zu 2) Sei (a_n) eine Cauchy-Folge und das ISP gültig. Dann gibt es eine Folge von nat. Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, sodass $|a_n - a_m| < 2^{-k-1} \ \forall n, m \geq n_k$

Wir betrachten nun die Intervalle

$I_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k}\} = [a_{n_k} - 2^{-k}, a_{n_k} + 2^{-k}]$.

Dann gilt $I_k \supset I_{k+1}$ ~~dann~~ $\forall k \in \mathbb{N}$, denn

ist $x \in I_{k+1}$ also $|x - a_{n_{k+1}}| < 2^{-k-1}$ so folgt

$|x - a_{n_k}| \leq |x - a_{n_{k-1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \leq 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k}$, da $n_{k+1} > n_k$ $\geq n_k$

$\Rightarrow x \in I_k$

Ferner gilt $|I_k| = 2^{-k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Also (I_k) ist eine IS. Nach dem ISP gibt es ein $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$

Wir zeigen $\lim a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert, sodass $2^{-k+1} < \varepsilon$ und

es Folgt für $n \geq n_k$ $|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{\leq 2^{-k-1}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\leq 2^{-k}} \leq 2^{-k+1} < \varepsilon$

da $a \in I_{n_k}$.