Bsp: 1) $\frac{x^3-x}{x^2+1} = x + o(1)$

2) $2x^2+x+1 \in O(x^2)$, genauer $2x^2+x+1 = 2x^2+O(x)$.

Etwas weniger genau $2x^2+x+1 = 2x^2+o(x^2)$.

a) $\tan|_{]-\pi/2;\pi/2[}$ ist sms. Die Umkehrfkt. $\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ heißt arcus tangens.

b) $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ ist smw. Die Umk.Fkt. $\arcsin : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ heißt arcsin.

13.17 Satz

a) $\arctan(x)$ ist diffbar mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) arcsin ist auf $]-1; 1[$ diffbar mit $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Beweis: b) $(\sin(x))' = \cos(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^2}$$

a) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{\frac{\sin^2+\cos^2}{\cos^2}(\arctan)}$

$= \frac{1}{(1+\tan^2(\arctan))} = \frac{1}{1+x^2}$. $\square$

14. Asymptotisches Verhalten

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen f für groß x beschreiben. Die simpelste Aussage ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ Konstante

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}$ sodass $|f(x) - c| < \varepsilon\ \forall x \geq x_0$.

Eine Andre Aussage ist:

14.1 Definition

$\lim (f(x)) = \infty :\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.d. $f(x) \geq K\ \forall x \geq x_0$

14.2 Bsp

$\lim \frac{x^3-x}{x^2+1} = \infty$. Genauere Aussage möglich. Mit PD:

$$(x^3 - x) : (x^2+1) = x + \underbrace{\frac{-2x}{x^2+1}}_{\to 0}$$
$$\frac{-(x^3+x)}{-2x}$$

Also $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$ verhält sich für sehr große x fast wie $y = x$.

14.3 Definition

$f, g: [a; \infty[\to \mathbb{R}$ Fkt. Wir sagen $f(x)$ wächst von der Ordnung $O(g(x))$ Falls ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert und $x_0 \geq a$ s.d. $f(x) \leq c \cdot g(x)\ \forall x \geq x_0$. Schreibweise $f(x) \in O(g(x))$ oder $f(x) = O(g(x))$.

$f(x) \in o(g(x))$, falls $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ Klein $o(g(x))$.

13.12. Hilfssatz

a) $\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 0$.

b) $\sin(x) > 0 \ \forall x \in \,]0;2]$

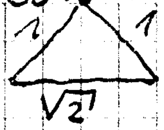
Bew: $\cos(2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$ alt. Reihe. Glieder fallen monoton ab k wobei: mit $\frac{2^{2k}}{(2k)!} > \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} \Leftrightarrow (2k+2)(2k+1) > 2^2 = 4$ $\Leftrightarrow k \geq 1$. Leibniz:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2) \geq 1 - \frac{2^2}{2!} = -1 \\ \cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \cos(2) \in [-1; -\tfrac{1}{3}]$$

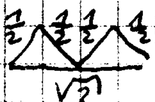
$\sin(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$. $\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} > \frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!} \Leftrightarrow (2k+3)(2k+2) \geq x^2$ $\Leftarrow 2k+2 \geq x \Leftarrow k \geq 0$ und $x \leq 2$. Also $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$

Für $x \in [0;2[$. $\left. x\left(1 - \frac{2^2}{6}\right) \leq \sin(x) \leq x \right\} \Rightarrow \sin(x) > 0$ Für $x \in \,]0;2]$.

Hypothese: $\sqrt{2} = 2$
Beweis:



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ Länge bleibt erhalten

Iteration liefert: $\sqrt{2} = 2$. □

13.13. Definition

Wir definieren π als das doppelte der eindeutig best. NST $\frac{\pi}{2} \in [0;2]$ vom cos. $\rightsquigarrow \pi > 3{,}14\ldots$ Also $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

13.14. Satz

1) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

2) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

3) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. □

Bedeutung von sin, cos

1) $[0; 2\pi[\, \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ durchläuft 1x EK

2) Sinus und Cosinus sind Lösungen der DLG: $y'' = -y$.

Genauer: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 2x diffbar und $x_0 \in I$, $f''(x) = -f(x) \ \forall x \in I$.
$\Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)\sin(x - x_0) + f(x_0)\cos(x - x_0)$.

13.15. Definition

tan, cot, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ def. auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ def auf $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Beweis: Quotregel. □

13.16. Definition

Exponentialfkt zur bel. Basis $a \in \mathbb{R}_{>0}$

13.9 Definition Satz

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann sei: $a^x = e^{x \ln(a)}$. Es gilt:

1) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

2) $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $a^x = \sqrt[q]{a^p}$ mit alter Def.

3) $x \longmapsto a^x$ ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

Beweis: 1), 3)

Zu 2) $a^n = a \cdot \ldots \cdot a = (e^{\ln(a)})^n = e^{n \ln(a)}$ gilt für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
$n \in \mathbb{Z}_{<0}$ folgt dann auch $a^0 = 1 = e^0$. $x = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[p]{a^p} \stackrel{!}{=}$
$e^{\frac{p}{q}\ln(a)} \Leftrightarrow q^p \stackrel{!}{=} e^{(\frac{p}{q}\ln(a))^q} = a^p$. $\square$

13.10 Satz + Definition

Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann ist $x \mapsto a^x$ sms und die Umkehrfkt.
$\log_a$: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist diffbar mit $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$. $\square$

Bsp: $x^x = f(x)$, $f'(x) = (1 + \ln(x))x^x$.

Trigonometrische Funktion

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos(x) + \sin(x)i$

Additionstheorem

1) $\cos(x_1+x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$

$\sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2)$

2) $\sin^2 + \cos^2 = 1$; $1 = \cos(0) = \cos(-x+x)$ und 1) anwenden,
cos ist gerade: $\cos(x) = \cos(-x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

13.11 Satz

Sin und Cos sind diffbar mit: $(\sin')(x) = \cos(x)$
$(\cos')(x) = -\sin(x)$.

Beweis: Zunächst zeigt $\sin'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$, genauso wie für die $(\exp)'(0) = 1$. Allg. Fall.

$(\sin(x_0+h) - \sin(x_0)) \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}(\sin(x_0) \cdot (\cos(h) - 1)) + \cos(x_0) \cdot$
$\frac{1}{h} \cdot \sin(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \cos(x_0)$. cos analog. $\square$