Beweis:

a) ist ein Spezialfall von b) mit $I_k = \{\tau(k)\}$

b) Zunächst die absolute Konvergenz von $\sum_{j\in I_k} a_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I_k, j\leq n} a_j$.
Da die Partialsummen für $I' \subset I'' \subset I_k$ für alle endlichen Mengen $\sum_{j\in I'} |a_j| \leq \sum_{j\in I''} |a_j|$ monoton steigen, genügt es zu zeigen, dass diese Summen beschränkt bleiben. $\sum_{j\in I'} |a_j| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ falls $N = \max\{j \mid j \in I'\}$, ist dies der Fall. Für die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ gehen wir genauso vor:
$\sum_{k=0}^{l} |s_k| = \sum_{k=0}^{l} \lim_{N\to\infty} |\sum_{j\in I_k, j\leq N} a_j| \leq \sum_{k=0}^{l} \lim_{N\to\infty} \sum_{j\in I_k, j\leq N} |a_j| = \lim_{N\to\infty} \sum_{j\in \bigcup_{k=0}^{l} I_k, j\leq N} |a_j|$, da die I_k disjunkt sind $\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{j\leq N} |a_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$.
Für die Gleichheit der GW betrachten wir $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und zu $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass $|s - \sum_{n=0}^{n_0-1}| < \varepsilon$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Sei $k_0 = \max\{k \mid \{0;\dots;n_0-1\} \cap I_k \neq \emptyset\}$. Dann gilt für $k_1 \geq k_0$
$|s - \sum_{k=0}^{k_1} s_k| \leq |s - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n| + \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{n\in I_k, n\geq n_0} |a_n| \leq |s - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n| + \sum_{n\geq n_0} |a_n| < \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ $\square$

9.20 Definition

Die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt komplexe Exponentialfunktion.

9.21 Satz (Funktionalgleichung der Expfunktion)

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Beweis: Wir betrachten das Cauchy-Produkt der absolut konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k \cdot w^{n-k}}{n!} = \frac{(z+w)^n}{n!}$ nach der Binomischen Formel. Als Folgerung aus dem gr. Umordnungssatz: $\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right)$
$= \exp(z) \cdot \exp(w)$. $\square$

9.22 Korollar

1) $\exp(0) = 1$

2) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $\qquad$ $\exp(0) = 1$

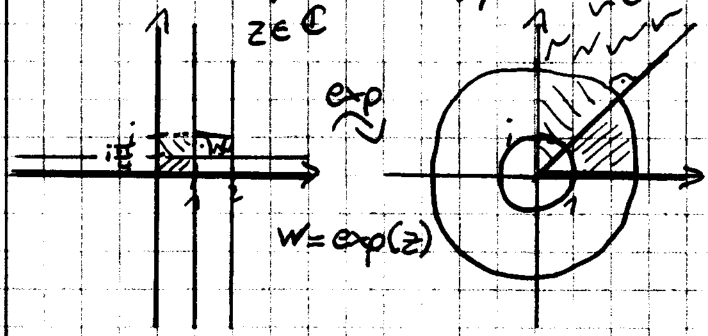
Beweis: 1) klar. zu 2) $\exp(-z+z) \overset{\shortparallel}{=} \exp(-z) \cdot \exp(z)$

$\Rightarrow \exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $\square$

Setzen wir $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, ein, so erhalten wir $\exp(yi)$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$ also ein Zusammenhang zwischen der Komplexen exponential Funktion und dem cos und sin Reihen. Für reelle $x \in \mathbb{R}$ schreibt man $\exp(x) = e^x$

9.23 Satz

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(z) = e^x \cdot (\cos(y) + \sin(y) i)$ $\square$



Die Additionstheoreme für sin und cos folgen aus denen für die komplexen Exp.fkt. und der Multiplikationsformel in $\mathbb{C}$.

9.24 Satz

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$. Insbesondere gilt $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = 1$.

Beweis: $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \exp(i\alpha) \cdot \exp(i\beta)$
$= \exp(i(\alpha+\beta)) = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) i = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) i + i \sin(\beta)\cos(\alpha) + i^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)) i$

Realteil/Imaginärteil der Gleichung sind die Behauptung.

$1 = \cos(0) = \cos(-\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)\sin(\alpha)$.

Die Cosinus Reihe hat nur gerade Potenzen $- \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

Analog sinus.

Potenzreihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

(a_n) Reihe komplexer Zahlen, z_0 Entwicklungspunkt $\in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ noch Variable.

9.14 Satz

Sei $\sum a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. $z_1 \in \mathbb{C}$ ein Punkt in der Reihe $\sum a_n (z-z_0)^n$. Dann konvergiert die Reihe $f(z)=\sum a_n (z-z_0)$ für alle z mit $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

9.15 Korollar

$\exists R \in [0;\infty]$ sodass $f(z)=\sum a_n (z-z_0)^n$ $\forall z$ mit $|z-z_0| < R$ konvergiert, $\forall z$ mit $|z-z_0|>R$ divergiert. R heißt Konvergenzradius von f.

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $z_0=0$. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konvergent, dann ist die Folge $(a_n z_1^n)$ beschränkt, etwa $|a_n z_1^n| \leq M \; \forall n$, dann folgt für $|z|<|z_1|$, etwa $0 \leq \frac{|z|}{|z_1|} = q < 1$, $|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \cdot q^n \leq M \cdot q^n$. Also $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$ ist eine konv. Majorante. □

Formeln für den Konvergenzradius

9.16 Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen $\neq 0$. So existiert $q=\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konv.radius

$R = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } q>0 \\ \infty & \text{falls } q=0 \end{cases}$

Beweis: Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z|$. □

Beispiel: Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $R=\infty$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)!} / \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

9.17 Definition

Sinus und Cosinusreihe.

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Diese Reihen konvergieren für jedes

$x \in \mathbb{R}$, da für festes x das Quot. krit:
$\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| / \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ greift. □

Satz 9.16 lässt sich nicht direkt anwenden, da bei diesen Potenzreihen jeder zweite Koeffizient 0 ist. Eine Formel die immer greift ist:

9.18 Satz (Formel von Cauchy-Hadamard)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann hat die Potenzreihe den Konvergenzradius

$$R = \begin{cases} \infty &, q = 0 \\ 1/q &, 0 < q < \infty \\ 0 &, q = \infty \end{cases}$$

Beweis: Wurzelkrit. □

Bsp: $\cdot \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n \quad \sqrt[n]{n!}$?

$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \quad \sqrt[n]{n^n} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{2^k} z^{2^k}$, $R = 0$

$\sqrt[2^k]{(2^k)^{2^k}} = 2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n$, C-Had: $\sqrt[n]{n}$, Quot.: $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow R = 1/1 = 1$.

$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergiert, da $|\frac{1}{2}| < 1$.

9.19 Satz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen

a) Kleiner Umordnungssatz

Sei $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Konvergiert $\sum a_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut und die GW sind gleich: $\sum a_n = \sum a_{\tau(n)}$.

b) Großer Umordnungssatz

Sei $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$ eine disjunkte Vereinigung endlicher oder unendlicher Teilmengen von $\mathbb{N}$. Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann konvergieren auch die Reihen $s_k = \sum_{n\in I_k} a_n$ absolut (der GW s_k hängt nicht von der Reihenfolge der Summanden ab) und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ konvergiert ebenfalls absolut und $s = \sum a_n = \sum s_k$