Igor Schlegel

Def: (a_n) ist eine Cauchy-Folge, wenn
$\forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall\ n,m \in \mathbb{N}$ gilt.
Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen (I_n) mit:
1) $I_n \supset I_{n+1} \quad \forall n$
2) $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$
Intervallschachtelungsprinzip: Jede Intervallschachtelung (I_n) enthält ein Element $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ in dem Durchschnitt.
Satz: VA $\Leftrightarrow$ ISP (unter der Verwendung der Axiome I–III, A, AA)
Zuletzt: IVP $\Rightarrow$ VA.
Zu VA $\Rightarrow$ IVP.
Sei nun eine Intervallschachtelung (I_n) gegeben und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Wir können dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in I_n$ auswählen, z.B. den unteren Randpunkt.
Wir zeigen zunächst (a_n) ist eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon>0$. Da $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|I_N| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dann gilt
$$|a_n - a_m| = |a_n - a_N + a_N - a_m| \le |a_n - a_N| + |a_N - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
für alle $n,m \ge N$ da $I_n \subset I_N$ und $I_m \subset I_N$ und deshalb $a_n, a_m \in I_N$. Nach dem VA existiert der GW $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir zeigen $a \in \bigcap_{N=1}^{\infty} I_N$.
Angenommen dies ist nicht der Fall, dann existiert ein n_0, sodass $a \notin I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$.
Gilt etwa $a < a_{n_0}$ so folgt $a_n - a \ge a_{n_0} - a\ \forall n \ge n_0$, da $I_n = [a_n, b_n] \subset I_{n_0}$ für $n \ge n_0$ $\quad [\ a_0\ a_n\ \ b_0\ ]$
Dies gibt ein Widerspruch zur Existenz eines N sodass $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2}\ \forall n \ge N$. Analog ist $a > b_{n_0}$ so erhalten wir $|a - a_n| \ge |a - b_n| \ge |a - b_{n_0}| = \varepsilon\ \forall n \ge N$, erneut ein Widerspruch zu

$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \square$

6.8 Definition

Sei b eine natürliche Zahl ≥ 2. Unter einem b-adischen Bruch versteht man eine Reihe: $\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \cdot b^{-n}$, genauer den GW der Folge von Partialsummen:

$(s_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, $s_\ell = \pm \sum_{n=-k}^{\ell} a_n \cdot b^{-n}$ mit Ziffern $a_n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n < b$.

Man schreibt häufig auch:

$$\underbrace{\pm a_k a_{k+1} \cdots a_1 a_0}_{\text{Vorkommastellen}} \cdot \underbrace{a_1 a_2 a_3 \ldots}_{\text{Nachkommastellen.}}$$

$b=10$, $b=2$ werden am häufigsten verwendet. (Dezimalzahlen).

Zu zeigen ist: Die Folge dieser Partialsummen konvergiert bzw bildet eine Cauchy-Folge. $n \geq m \geq -k$

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{\nu=-k}^{n} a_\nu b^{-\nu} - \sum_{\nu=-k}^{m} a_\nu \cdot b^{-\nu}\right|$$

$$= \left|\sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu b^{-\nu}\right| = \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \cdot b^{-\nu} \leq (b-1)\, b^{-m-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-m-1} b^{-\mu}$$

$\nu = \mu + m + 1$

$\star$

Nun gilt

$$\sum_{\mu=0}^{n-m-1} b^{-\mu} = \frac{1-b^{-(n+m)}}{1-b^{-1}} \leq \frac{1}{1-b^{-1}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)(1-q) = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = 1 - q^{n+1}\right]$$

$\star$ $\frac{b-1}{1-b^{-1}} \cdot b^{-m-1} < \varepsilon \quad \forall m \geq N$ nach den Folgen aus AA.

Die Dezimalbruchbestimmung ist durch den GW nicht eindeutig bestimmt, z.B. $0.\overline{9} = 1$

6.9. Satz.

Sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Jede reelle Zahl läßt sich in einem b-adischen Bruch entwickeln.

Bem: Insbesonders läßt sich jede reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale Zahl approximieren. (Die Partialsummen des b-adischen Bruchs sind rational).

Beweis: Es genügt die Aussage für reelle Zahl ≥ 0. Nach den Folgen aus AA existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so $x < b^{n+1}$.

Wir konstruieren nun mit vollst. Induktion eine Folge $(a_\nu)_{\nu \geq -m}$

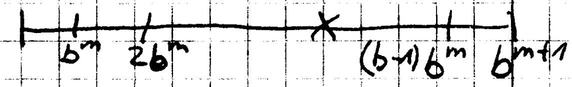
von nat. Zahlen $0 \le a_\nu \le b-1$, sodass
für $x_n = \sum_{\nu=-m}^{n} a_\nu \cdot b^{-\nu}$ $x_n \le x \le x_n + b^{-n}$ gilt.

Induktionsanfang: $(n = -m$

Wir betrachten die Unterteilung

$0 = 0 \cdot b^m < 1 \cdot b^m < 2 \cdot b^m < \dots < (b-1)b^m < b^{m+1}$

Da $0 \le x < b^{n+1}$ gibt es genau eine nat. Zahl a_{-m}
$0 \le a_m \le b-1$, sodass
$a_m b^m \le x < (a_{-m}+1)b^m$ gilt.



Induktionsschritt:

Es seien alle a_ν mit $-m \le \nu \le n$ schon konstruiert und für $x_n = \sum_{\nu=-m}^{n} a_\nu b^{-\nu}$ gelte $x_n \le x < x_n + b^{-n}$. Betrachte $x_n < x_n + b^{-(n+1)} < x_n + 2b^{-(n+1)} < \dots < x_n + (b-1)b^{-(n+1)} < x_n + b^{-n}$.

Dann existiert genau ein $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ mit $0 \le a_{n+1} < b$ sodass

$x_{n+1} = x_n + a_{n+1} b^{-(n+1)} \le x < x_n + (a_{n+1}+1) b^{-(n+1)}$.

Also für $x_{n+1} := x_n + a_{n+1} b^{-(n+1)}$ gilt dann $x_{n+1} \le x < x_{n+1} + b^{-(n+1)}$. Die (x_n) bilden die Partialsummen eines b-adischen Bruchs und

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, da $\lim_{n\to\infty} b^{-n} = 0$

6.10 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ eine aufsteigende Folge nat. Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge der Folge (a_n).

6.11 Satz (Bolzano-Weierstraß)

☆

Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, ~~sodass~~ wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \le A \ \forall n$.

☆ Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis: 1) Sei (a_n) beschränkt.

etwa $A \le a_n \le B$ für alle n.

Wir betrachten das Intervall $[A,B]$ und konstruieren mit Induktion eine Folge von Intervallen $[A_k,B_k]$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

a) In $[A_k,B_k]$ liegen unendlich viele Glieder der Folge (a_n).

b) $[A_k, B_k] \subset [A_{k-1}, B_{k-1}]$ $\quad (k \ge 1)$

c) $B_k - A_k = 2^{-k}(B-A)$

Induktionsanfang: $k=0$ $[A_0,B_0]=[A,B]$

Induktionsschritt: $[A_k,B_k]$ sei schon konstruiert.

Sei $M = \frac{A_k+B_k}{2}$, dann liegen in einem der Teilintervalle $[A_k,M]$ und $[M,B_k]$ unendlich viele Glieder der Folge.

Wir setzen

$$[A_{k+1},B_{k+1}] = \begin{cases} [A_k,M] & \text{falls } [A_k,M] \text{ unendlich viele Glieder der Folge enthält } (a_n) \\ [M,B_k] & \text{sonst.} \end{cases}$$

$[A_{k+1},B_{k+1}]$ hat die Eigenschaften a), b), c)

2) Wir definieren induktiv eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \in [A_k,B_k]$.

Induktionsanfang $a_{n_1} \in [A_1,B_1]$.

Induktionsschritt $n_1,\dots,n_k$ seien schon konstruiert mit $n_1<n_2<\dots<n_k$ $\quad a_{n_k}\in[A_k,B_k]$. Da $[A_{k+1},B_{k+1}]$ unendlich viele Glieder der Folge enthält, existiert ein n_{k+1} mit $n_{k+1}>n$ und $a_{n_k} \in [A_{k+1},B_{k+1}]$.

3) Nach dem ISP existiert $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [A_k,B_k]$. Es gilt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

In der Tat zu $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ so dass $0 \le 2^{-N}(B-A) < \varepsilon$.

Dann gilt für $k\ge N$

$|a_{n_k}-a| \le 2^{-N}(B-A) < \varepsilon$ da a und $a_{n_k} \in [A_k,B_k] \subset [A_N,B_N]$. □

6.12 Definition:

Eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n) wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Beispiele 1) Die Folge (a_n) mit $(a_n = (-1)^n)$ hat die Häufungspunkte ± 1.

2) Die Folge $(a_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})$ hat die gleichen Häufungspunkte ± 1.

3) Die Folge $(a_n) = (n)$ hat keinen Häufungspunkt, da jede Teilfolge unbeschränkt wächst.

4) Die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat den HP 0

obwohl sie zunächst unbeschränkt ist.

5) Jede konvergente Folge (a_n) hat genau einen HP nämlich $a = \lim_{n \to \infty} a_n$

b-adische Brüche $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$ $x \approx \frac{a}{b^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.