Igor Schlegel

10. Reelle Funktionen, Stetigkeit

10.1. Definition

Sei: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $x_0 \in D$. f heißt stetig in x_0 wenn es: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $\forall x \in D$ stetig ist.

10.2. Beispiele

1) $f(x) = x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, können wir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) = \varepsilon$ wählen.

2) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, ist stetig und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, $|x^2 - x_0^2| < |(x_0 \pm \delta)^2 - x_0^2| = |\pm 2\delta x_0 + \delta^2| \overset{\Delta}{\leq}$ $2|x_0|\delta + \delta^2 \leq \delta(2|x_0| + 1) < \varepsilon$, falls $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1})$.
In diesem Fall hängt $\delta = (x_0, \varepsilon)\delta$ wirklich von x_0 ab.

3) Die Funktion: $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ist in x_0 nicht stetig: Für $\varepsilon = 1$ und $0 < \delta \ll 1$ gibt es Punkte x mit $|x - 0| < \delta$ aber $x > 0$, also $|f(x) - f(0)| = |1 - 0| = 1 \nless \varepsilon$

4) Dierichletfunktion ist nirgendwo stetig.

5) $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \begin{cases} q^{-1} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ hat ein interessantes Stetigkeitsverhalten.

10.3 Satz

Es seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetige Funktionen, dann sind auch $f+g: D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$; $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ stetig in x_0. Bei $\frac{f}{g}$ benötigen wir $x_0 \in D'$, d.h. $g(x_0) \neq 0$.

Beweis: Analog zu entsprechenden Formeln für GW. □

Wesentliche Abschätzung im Fall 3) $x, x_0 \in D'$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x)g(x_0) \pm f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right|$$

$$\leq \frac{|f(x) - f(x_0)| \cdot |g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} + \frac{|f(x_0)|\,|g(x) - g(x_0)|}{|g(x) \cdot g(x_0)|}$$ Da $g(x_0) \neq 0$ existiert zu $\varepsilon = \frac{|g(x_0)|}{2}$ ein δ_0 sodass $\underset{x \in D}{|x - x_0|} < \delta_0 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$

$\Rightarrow |g(x)| \geq \frac{|g(x_0)|}{2}$. Für solche x haben wir dann
$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|g(x_0)|/2} + |f(x_0)| \cdot \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x_0)|^2/2}$.
Zu $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}|g(x_0)| \; \exists \, \delta_1 > 0$, sodass $|x-x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|$
$< \varepsilon_1$. Zu $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}\frac{|g(x_0)|^2}{|f(x_0)|+1} \; \exists \, \delta_2 > 0$, sodass $|x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow$
$|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4} \frac{|g(x_0)|^2}{|f(x_0)|+1}$. Für $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ gilt
dann für $x \in D$ mit $|x-x_0| < \delta$. $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| < \frac{\varepsilon |g(x_0)|/4}{g(x_0)/2} +$
$\frac{|f(x_0)|}{|f(x_0)|+1} \cdot \frac{|g(x_0)|^2/4}{|g(x_0)|^2/2} \cdot \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

<u>10.4 Satz</u> (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei: $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$. f ~~ist~~ ist stetig in a genau dann, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ gilt.

Beweis: Es sei f in Punkt a stetig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $\delta = \delta(\varepsilon)$, sodass für $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt. Sei (a_n) eine Folge aus D mit $\lim a_n = a$. Dann existiert zu $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \delta \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. Mit anderen Worten: $f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$. Umgekehrt sei f in einem Punkt a nicht stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass für beliebiges $0 < \delta \ll 1$: $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ nicht gilt.
Etwa zu $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists a_n \in D$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ aber $|f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.
$\Rightarrow \lim a_n = a$ aber $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$.
Wir haben also eine Folge (a_n) gefunden, die $\lim f(a_n) = f(a)$ nicht erfüllt. $\square$

Bemerkung: Das Folgenkriterium ist nicht so gut geeignet Stetigkeit nachzuweisen, da es sehr viele Folgen gibt. Aber um Unstetigkeit zu zeigen ist es gut.

<u>10.5 Beispiel</u>

$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

f ist in x_0 nicht stetig, da für $a_n = \frac{1}{\pi/2 + n 2\pi}$ $f(a_n) = 1$ und

$\lim a_n = 0$, $f(0) = 0$

$a_n = \frac{1}{3/\pi + 2n\pi}$, $f(a_n) = -1$, $\lim f(a_n) = -1 \neq 1 \neq 0$.

$F(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

F ist in $x_0 = 0$ stetig: Zu $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon$ gilt $|f(x) - 0| \leq |x| \cdot |\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. Mit Schulwissen können $F(x)$ für $x \neq 0$ differenzieren. $(x \sin(\frac{1}{x}))' = \sin(\frac{1}{x}) + x (\sin(\frac{1}{x}))' =$

$\underset{\text{n. st}}{\sin(\frac{1}{x})} + x \cdot \underbrace{(\cos(\frac{1}{x})) \cdot \frac{-1}{x^2}}_{-\frac{1}{x}(\cos(\frac{1}{x}))}$

10.6 Satz

Sei $F: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ Funktion $f(D) \subset E$ $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ ist definiert. Sei F in x_0 stetig und g in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D mit $\lim a_n = x_0$. F stetig $\Rightarrow (f(a_n))$ eine Folge in E mit $\lim f(a_n) = y_0$. g stetig $\Rightarrow$ $\lim g(f(a_n)) = g(y_0)$ bzw. $\lim g \circ f(a_n) = (g \circ f)(x_0)$. $\square$

10.7 Definition (GW bei Funktionen)

Sei $F: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}$ ein HP von D (d.h. $\exists$ Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$, sodass $\lim a_n = a$). Wir sagen $\lim F(x) = c$, falls für jede Folge (a_n) aus $D - \{a\}$ mit GW $\lim a_n = a$ $\lim F(a_n) = c$. Wir sagen $\lim\limits_{x \nearrow a} F(x) = c$ wenn für jede Folge aus D mit $a_n < a$ $\forall n$ mit Grenzwert $\lim a_n = a$ $\lim F(a_n) = c$ gilt. (Analog $\lim\limits_{x \searrow a} F(x) = c$)

10.8 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $F: [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Dann nimmt f jeden Wert zw. $F(a)$ und $F(b)$ an. Insbesondere gilt: $\xi \in]a; b[$ mit $f(\xi) = 0$, eine NST mit $F(a) < 0$, $F(b) > 0$.

Beweis: Es reicht den Spezialfall zu behandeln, indem zu c zwischen $F(a)$ und $F(b)$ zu $\pm(F - c)$ zu übergehen. Sei also $F(a) < 0$ und $F(b) > 0$. Wir konstruieren induktiv zwei Folgen

(a_n) und (b_n) mit • a_n ist mw $F(a_n) \leq 0 \ \forall n$

• b_n ist mF $F(b_n) \geq 0 \ \forall n$

und $b_n > a_n$ und $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$. $a_0 = a$, $b_0 = b$. Sind (a_n), (b_n) schon konstruiert so definieren wir

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{Falls } F\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ a_n & \text{" " " } > \text{"} \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{, Falls } F\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{, falls " } > 0 \end{cases}$$

Dann gilt $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$, analog für $b_n \Rightarrow \lim a_n$ und $\lim b_n$ existieren und wegen $\lim (a_n - b_n) = 0 = \lim \frac{1}{2^n}(b-a)$ ist $\xi = \lim a_n = \lim b_n$. F stetig. $F(\xi) = \lim F(a_n) \leq 0$ und $F(\xi) = \lim F(b_n) \geq 0 \Rightarrow F(\xi) = 0$. □

Beispiele für stetige Funktionen:

1) $F \equiv c$ konstante ist stetig.

$F(x) = x$ ist stetig.

$F(x) = x^n = x \cdot x^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$

$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist stetig

2) $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome definiert auf $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ ist stetig.