Wie entscheidet man ob $f(x) \in o(g(x))$?

Typische Situation $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$ und die Formel $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ macht keinen (!) Sinn. (Doch.)

14.4 Satz (Regel von l'hospital)

Seien $f, g : [a;\infty[\to \mathbb{R}$ diffbare Fkt. mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a;\infty[$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim g(x)$. Existiert $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dann existiert auch $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt: $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Anwendung:

14.5 Satz

e^x wächst schneller als jedes Polynom bzw. $\lim \frac{x^n}{e^x} = 0$ für bel. $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Beweis: n-mal Ableiten + l'hospital $\Rightarrow \lim \frac{n!}{e^x} = 0$. $\square$

Zunächst eine etwas einfachere Version:

14.6. Satz

Sei $f, g :]a;b[\to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a;b[$ und $\lim_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x\searrow a} g(x)$. Existiert der GW $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dann existiert auch: $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt Gleichheit.

14.7. Hilfssatz

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $]a;b[$ diffbar und $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $\varphi \in]a;b[$ sodass $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)}$.

Beweis: Betrachten $F(x) = f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}$. Dann gilt: $F(a) = f(a) = F(b)$.

Satz von Rolle $\exists \varphi \in]a;b[: 0 = F'(\varphi) = f'(\varphi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\varphi)$, $g'(\varphi) \neq 0$ nach Voraussetzung. $\square$

Beweis 14.6: Ergänzen f, g durch $f(a) = g(a) = 0$ zu zwei stetige Fkt. auf $[a;b[$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)}$ für $\varphi \in]a;x[$.

Damit $x \searrow a$ auch $\varphi \searrow a$ folgt: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)}$. $\square$

Beweis 14.4.

1) Da $g'(x) \neq 0$ ist $g : [a;\infty[\to \mathbb{R}$ injektiv nach MWS.

Wegen $\lim g(x) = \infty$ ist g mw und $g'(x) \geq 0 \ \forall x$.

$\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq x_0$, oder $-f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq x_0$

letzteres ausgeschl. da $\lim f(x) = +\infty$. Also $f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq x_0$

und damit $c = \lim \frac{f'}{g'} \in [0; \infty]$. Angenommen $c > 0$. Sei

$0 < y_0 < c$ beliebig. Wir zeigen Beh: $\exists x_1$ sd. $\frac{f(x)}{g(x)} \geq y_0$

$\forall x \geq x_1$ [$\Rightarrow \liminf\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq c$, für $c = 0$ wissen wir dies

schon.]. Sei y_1, $0 < y_0 < y_1 < c$. Betrachten ein x_2, s.d.

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq y_1 \ \forall x \geq x_2$. Betrachten jetzt $n > x > x_2$ und dann

Diff.quot. $\frac{f(n) - f(x)}{g(n) - g(x)} = \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)} \geq y_1$. $\frac{f(n)}{g(n)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1 - \frac{f(x)}{f(n)}}{1 - \frac{g(x)}{g(n)}} \right)}_{\xrightarrow{n \to \infty} 1}$

Also ex. x_3 s.d. $\frac{1 - \frac{f(x)}{f(n)}}{1 - \frac{g(x)}{g(n)}} \leq \frac{y_1}{y_0} \ \forall n \geq x_3$. $\Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{y_1}{y_0} \geq y_1$

$\forall n \geq \max\{x_0, x_3\} =: x_1$. Die Beh. folgt. Genauso zeigt man

$\limsup \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq c$. Insgesamt: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

14.8. Beispiel

$\ln(x)$ wächst langsamer als jede Pot. Fkt. $x \mapsto x^a$, $a > 0$.

$\lim \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$. $\lim \ln(x) = \infty = \lim x^a$, l'hospital $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

$(x^a)' = a x^{a-1}$, $\frac{(\ln(x))'}{(x^a)'} = \frac{1/x}{a x^{a-1}} \xrightarrow{x \to \infty} 0$, da $a > 0$. Die Beh. folgt.

Bem.: Ähnliche Regeln gelten für $\lim f(x) = 0 = \lim g(x)$.

$\lim f(x) = \lim g(x) \in \{0; -\infty; \infty\}$.

15. Integration

15.1

Sei $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ eine (pos.) Fkt. wir wollen die Fläche

unter dem Graphen bestimmen. Idee: Approximation.

15.2 Definition

Eine Funktion $\varphi: [a; b] \to \mathbb{R}$ heißt TreppenFkt. wenn es

eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n$ gibt, sodass $\varphi|_{]t_{i-1}; t_i[}$

$= c_i$ eine kons. Fkt ist. Die Werte im Randpunkten $(\varphi(t_i))$

dürfen beliebig sein.

15.3 Definition

Sei $\varphi: [a; b] \to \mathbb{R}$ eine TreppenFkt. Dann $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \cdot (t_i - t_{i-1}$

Bem: 1) $c_i\,(t_i - t_{i-1})$ ist die Fläche des Rechtecks.

2) $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ hängt nicht von der Zerlegung ab.

15.4. Definition

Sei $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ eine beschr. Fkt. Dann sei $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \geq f,\ \varphi \text{ Trp. Fkt.}\}$ (Oberintegral) analog Unterintegral.

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$ heißt (Rieman) integrierbar wenn $\int_a^{b*} = \int_{a*}^{b}$ und in diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ das Integral von f über das Intervall $[a;b]$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

$\Rightarrow \lim\frac{2}{x}=\lim\frac{1}{x}$

$\| \cdot x$ (auf bed. Seiten)

$\Rightarrow \lim 1 = \lim 2$

$\Rightarrow 1=2$ □

15.5.

Ist f intbar. und pos. dann lässt sich das Int. als Fläche unter dem Graphen interpretieren.

Beispiele:

a) Sei $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ monoton, etwa ms. $a=t_0<\ldots<t_n=b$ eine Unterteilung von $[a;b]$ und φ, ψ Trp. Fkt. mit dieser Unterteilung mit $\varphi\leq f\leq\psi$. $\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \int_{a*}^{b*} f(x)\,dx \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \int_a^b \psi\,dx$. Wir wählen eine äquidistante Unterteilung, $t_i = a + \frac{b-a}{n} i$, und beachten $\sum f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a)$ wegen der Monotonie.

$0 \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx - \int_{a*}^b f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]\,\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\cdot\frac{b-a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Satz 15.6. monotone Fkt. sind auf abg. Int. intbar.

15.7 Satz

Sei $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $\varphi\in\,]a;b[$. Dann gilt

f integrierbar $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,\varphi]}$ und $f|_{[\varphi,b]}$ sind int. bar. Und ist dies der Fall so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\varphi} f(x)\,dx + \int_{\varphi}^b f(x)\,dx$.

Beweis: OE ist φ ein Unterteilungspunkt von den betrachteten Trp. Fkt. $0 \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx - \int_{a*}^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{\varphi*} f(x)\,dx - \int_{a*}^{\varphi} f(x)\,dx}_{0} + \underbrace{\int_{\varphi}^{b*} f(x)\,dx - \int_{\varphi*}^{b} f(x)\,dx}_{0}$ Ist eine Summe von pos Zahlen. □

15.8. Beispiel

$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0;1]} : [0;1] \to \mathbb{R}$. $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0;1]}(x) = \begin{cases} 1 & \in \mathbb{Q}\cap[0;1]. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Diese Fkt. ist nicht Rieman integrierbar, da jedes offene Int. rat. und irrat. Zahlen / Punkte enthält. $\square$

15.9. Satz

Jede stetige Fkt. auf einem abgeschl. Int. (beschr.) ist intbar.