Igor Schlegel

6.15 Definition

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt:

1) ~~st~~ monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

2) streng " " , " $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

3) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

4) streng " " , " $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton fallend oder monoton steigend ist:

6.16. Satz

Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis: Sei (a_n) eine ~~konvergente~~ solche Folge.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir zeigen $\lim a_n = a$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein k_0, sodass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0$

Wir setzen $N = n_{k_0}$. Zu jedem $n \geq N$ existiert ein $k \geq k_0$ mit $n_k \leq n < n_{k+1}$, da die n_k eine strenge monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen sind. Ist (a_n) monoton wachsend (fallend)

Dann gilt: $a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}}$ $(a_{n_k} \geq a_n \geq a_{n_{k+1}})$

Ferner: $a_{n_k} \leq a_{n_l}$ $\forall\, l \geq k$ (Alternative)

$\Rightarrow a_{n_k} \leq \lim_{l\to\infty} a_{n_l} = a$

Also $\varepsilon > |a_{n_k} - a| = a - a_{n_k} \geq a - a_n \geq a - a_{n_{k+1}} = |a_{n_{k+1}} - a| \geq 0$ $\forall n \geq N$. $\square$

6.17 Satz

Sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Für $a_1 > 0$ definieren wir rekursiv $a_{n+1} = (a_n + \frac{b}{a_n}) \cdot \frac{1}{2}$, dann konvergiert (a_n) gegen eine reelle Zahl a mit $a > 0$, die $a^2 = b$ erfüllt. Wir definieren $\sqrt{b} := a$

Beweis: (1) Es gilt $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $a_1 > 0$ nach Voraussetzung.

Induktionsschritt: $a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} > 0$, $b > 0$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{b}{a_n})$.

Insbesondere ist die Folge wohldefiniert

2) Bevor wir die Konvergenz zeigen, überlegen wir uns was der GW $a=\lim a_n$ sein könnte. Angenommen (a_n) konvergiert und $a=\lim a_n>0$. Rechenregeln für GW geben:

$a=\lim a_n=\lim a_{n+1}=\frac{1}{2}(\lim a_n+\frac{b}{\lim a_n})=\frac{1}{2}(a+\frac{b}{a})$ nach den Regeln

$\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}(a^2+b)\Leftrightarrow a^2=b$

Damit ist gezeigt, wenn die Folge konvergiert, $a>0$, dann ist der GW eine Wurzel

3) Beh. $a_n^2\geq b \quad \forall n\geq 2$

In der Tat: $a_n^2-b=(\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{b}{a_{n-1}}))^2-b=\frac{1}{4}a_{n-1}^2+\frac{2}{4}b+\frac{1}{4}\frac{b^2}{a_{n-1}^2}-b$

$=\frac{1}{4}(a_{n-1}^2-2b+(\frac{b}{a_{n-1}})^2)=(\frac{1}{2}(a_{n-1}-\frac{b}{a_{n-1}}))^2\geq 0$

4) Es gilt $a_{n+1}\leq a_n \ \forall n\geq 2$.

$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}(a_n+\frac{b}{a_n})=\underbrace{\frac{1}{2a_n}}_{\geq 0}(a_n^2-b)\geq 0$.

5) Nach 1) und 4) ist $(a_n)_{\geq 2}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, also eine beschränkte Folge. Nach Satz 6.16 ist also (a_n) konvergent. $a:=\lim a_n$.

6) Wir müssen noch $a>0$ zeigen. Dann folgt die Behauptung mit 2).

Angenommen $\lim a_n=0=a$. Dann existiert zu $\varepsilon=\min(1,\frac{b}{2})$ ein N, sodass $a_n=|a_n-0|<\varepsilon \ \forall n\geq N$. Für $N+1$ gilt

★ $a_{N+1}=\frac{1}{2}(a_{N+1}+\frac{b}{a_{N+1}})\geq\frac{1}{2}(0+\frac{b}{1})$ ↯ □ oder $\frac{1}{2}(0+\frac{b}{b/2})=1$

strikt monoton größer, deshalb

★ $\geq \{\frac{1}{2}(0+\frac{b}{1})$, $\frac{1}{2}(0+\frac{b}{b/2})$

$\frac{1}{2}(0+2)=1\geq\varepsilon$

Bemerkung: Wie schon gesagt definieren wir $\sqrt{b}:=a$ und $\pm\sqrt{b}$ sind die einzigen Lösung von $x^2=b$.

$x^2-b=(x+\sqrt{b})(x-\sqrt{b})=0\Leftrightarrow x+\sqrt{b}=0$ oder $x-\sqrt{b}=0\Rightarrow x\in\{\pm b\}$

Beispiel $b=2$; $a_1=1$

n	a_n	b_n
1	1	2
2	1.5	1.333 333 333
3	1.416666666	1.411764706
4	1.414215686	1.414211438
5	1.414213562	1.414213562

6.18 Konvergenzgeschwindigkeit

Im Beispiel sehen wir das mit jeder Iteration sich die Anzahl der Korrekten Ziffern verdoppelt.

Wir definieren die <u>relativen</u> Fehler f_n durch $a_n = a(1+f_n) = \sqrt{5}\,(1+f_n)$, $f_n > 0$ da $a_n > a$. Einsetzen in die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{b}{a_n})$ gibt: $1 + f_{n+1} = \frac{1}{2}\left((1+f_n) + \frac{1}{1+f_n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2+2f_n+f_n^2}{1+f_n} = 1 + \frac{1}{2}\frac{f_n^2}{1+f_n}$

$\Rightarrow f_{n+1} \leq \frac{1}{2}\frac{f_n^2}{1+f_n} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2) = \frac{1}{2} f_n^2$ falls $f_n < 1$

Haben wir im Schritt n einen relativen Fehler von 10^{2}

$\Rightarrow f_{n+1} \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$ usw. $f_{n+2} \leq 1.25 \cdot 10^{-9}$. Man spricht von quadratischer Konvergenz.

7. Zur Existenz von $\mathbb{R}$

Wir werden die Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $(\subset \mathbb{C})$ auseinander konstruieren. (Dabei ist der Schritt von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ der einfachste.

7.1. Sei M eine Menge. Wir wollen den Begriff = auf M zu "ähnlich" oder "äquivalent" abschwächen.

Bsp: $f: M \to N$ $x, y \in M$ sind äquivalent, wenn $f(x) = f(y)$

Formal gesehen ist eine Äquivalenzrelation ~ auf M eine Teilmenge $R \subset M \times M$ $R = \{(x,y) \in M \times M \mid x \sim y\}$ mit besonderen Eigenschaften. Wir schreiben $x \sim y$ statt $(x,y) \in R$.

7.2. Definition

Eine Äq. R. auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$ (Schreibweise $x \sim y$ falls $(x,y) \in R$) mit folgenden Eigenschaften:

1) Reflexivität ~~...~~ $x \sim x$ $\forall x \in M$.

2) Symmetrie $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ $\forall x, y \in M$.

3) Transitivität: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ $\forall x, y, z \in M$

Bsp: 1) = ist eine Äq. R

2) $f: M \to N$, $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ ist eine Äq. R.

3) $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist keine Äq. R. Sym. fehlt.

4) M die Menge der ebenen Dreiecke $= \{\triangle, \triangledown, \dots\}$.
Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Winkel haben. Ähnlichkeit ist Äq.R. $\triangle \sim \triangle$

7.3. Satz + Definition

Sei $\sim$ eine Äq.R. auf M. Dann heißt zu $x \in M$ die Menge
$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\} \subset M\}$ die Äquivalenzklasse von x.
Je zwei Äq-klassen $[x], [y]$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Beweis: Angenommen $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, dann müssen wir $[x] = [y]$ zeigen.
Sei $z \in [x] \cap [y]$, also $x \sim z, y \sim z \overset{\text{Sym}}{\Rightarrow} x \sim z, z \sim y \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} x \sim y$.
Sei $w \in [y]$ also $y \sim w$. Dann folgt $x \sim y \sim w \Rightarrow x \sim w$
$\Rightarrow w \in [x]$. Dies zeigt $[y] \subset [x]$. Die andere Inklusion
$[x] \subset [y]$ zeigt man genauso, also $[x] = [y]$.

7.4. Definition

Sei $\sim$ eine Äq.R. auf M. Dann nennen wir jedes Element $y \in [x]$ einen Repräsentanten der Äq. Klasse $[x]$. Insbesondere ist $x \in [x]$ ein Repräsentant.

Die Menge der Äq.K. wird: ~~$M/\sim$ = "M modulo ~" = {~~
$M/_\sim = \{[x] \subset M \mid x \in M\} \subset 2^M$, "M modulo ~" bezeichnet.
$\pi : M \to M/_\sim, x \mapsto [x]$, heißt kanonisch. Rest oder Äq.K. abbildung.

5) $M = \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}_0$ $n \equiv m \mod d$ Falls die Differenz $n-m$ teilt. Dies ist eine Äq.R.

Bsp: $d = 3$ $\mathbb{Z}/_{\text{mod } 3} = \{[0],[1],[2]\}$
$[0] = \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$
$[1] = \{1, \pm 4, \pm 6, \dots\}$
$[2] = \{2, \pm 5, \pm 7, \dots\}$

7.5. Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$? Wir betrachten $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ u. definieren
$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ wenn $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$. Dies ist Äq.R. reflexiv, Symm ist klar.
$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \sim (a_3, b_3) \Rightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1, a_2 b_3 = a_3 b_2$
$\Rightarrow a_1 b_2 b_3 = a_2 b_1 b_3 = b_1 \cdot a_3 \cdot b_2 \Rightarrow b_2(a_1 b_3 - a_3 \cdot b_1) = 0 \in \mathbb{Z}$
$b_2 \neq 0 \Rightarrow a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0 \Rightarrow a_1 b_3 = b_1 a_3 \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$

$\frac{a}{b} = [(a,b)]$ und $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/_\sim$