Zunächst einmal ist f beschränkt und daher $\int^* f, \int_* f \in \mathbb{R}$.
Für die Gleichheit benötigen wir ein weiteres Konzept:

15.10 Definition

Eine Fkt. $f: I \to \mathbb{R}$, I Intervall heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0$ $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x, x_0 \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Der Unterschied zur Stetigkeit, wo $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ von ε und x_0 abhängt, dass hier $\delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall x_0$ gleich gewählt wird.

Bsp: $\frac{1}{x}$ nicht gl. stetig.

15.11. Satz

Stetige Fkt. auf abgeschl. Int. (beschr.) sind glm. stet.

Beweis: Sei $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir führen die Annahme, dass f nicht glm. stetig mit Hilfe von Bolzano-Weier zu einem WS. Sei f nicht glm. stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$ sodass für $\delta_n = \frac{1}{n}$ Punkte $x_n, y_n \in [a;b]$ existieren mit einerseits $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Nach BW. existiert eine konv. TF mit x_{n_k}. Sei $\bar{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a;b]$. Dann gilt auch $\lim y_{n_k} = \bar{x}$, da $\lim (x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$.
Stetigkeit von $f \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) = \lim f(y_{n_k})$. Dies Widerspricht $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. $\square$

Beweis von 15.9.:

Wir zeigen $\forall \varepsilon > 0$: $0 \leq \int^* f(x)dx - \int_* f(x)dx < \varepsilon$. Zu $\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\exists \delta$ sodass $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ gilt. Wählen wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, so fein, dass $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ und φ, ψ Trfkt. mit $\varphi|_{]t_{k-1}, t_k[} = \min(f|_{[t_{k-1}, t_k]})$
$\psi|_{]t_{k-1}, t_k[} = \max(f|_{[t_{k-1}, t_k]})$ dann gilt $\varphi \leq f \leq \psi$ und $0 \leq \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Es folgt: $0 \leq \int^* f(x)dx - \int_* f(x)dx \leq \int_a^b (\psi - \varphi)dx$
$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$. $\square$

Beispiel: $f(x) = x^2$ $\int_0^b x^2 dx =$ Wähle äquidistante Unterteilung.

$t_0 = 0 < \ldots < t_k = k \cdot \frac{b}{n} < \ldots < t_n = b$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} \leq \int_0^b x^2 dx \leq \sum \left(\frac{ib}{n}\right)^2 \frac{b}{n}$

Behauptung Folgt durch Gaus und GW. □

15.12. Satz (Fundamentale Eigenschaft des Integrals)

$f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ intbare Fkt. $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Integrale sind Homomorphismen.
- $g \leq f \Rightarrow \int g dx \leq \int f dx$ (Monotonie).
- Mit f ist auch $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$ intbar; sowie $|f| = f^+ + f^-$ ist auch intbar.
- Sei $q \geq 1$ mit f ist auch $|f|^q$ intbar.
- Mit f und g ist auch $f \cdot g$ intbar.

Beweis:

1) Nach Voraussetzung φ_i, ψ_i mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und $\int(\psi_1 - \varphi_1)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\int(\psi_2 - \varphi_2)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_2 + \psi_1$ und $0 \leq \ldots \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow f+g$ intbar. und die Behauptung folgt

2) analog.

3) ψ TrpFkt. mit $f \leq \psi \Rightarrow g \leq \psi \Rightarrow$ Behauptung Folgt

4) Nach Vor. $\exists\, \varphi \leq f \leq \psi$ TrpFkt. mit $\int(\psi - \varphi)dx \leq \varepsilon$. Dann gilt $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$ und $0 \leq \int(\psi^+ - \varphi^+)dx \leq \int(\psi - \varphi)dx \leq \varepsilon$

$\Rightarrow f^+$ intbar

$f^- = f^+ - f$ und $|f| = f^+ - f^-$ sind nach 1, 2 intbar.

5) Da f beschränkt können wir $0 \leq |f| \leq 1$ voraussetzen.

Da $|f|$ intbar. ist gibt es TrpFkt $0 \leq \varphi \leq |f| \leq \psi \leq 1$ mit $\int(\psi - \varphi)dx \leq \frac{\varepsilon}{p}$. Dann sind ψ^p, φ^p TrpFkt mit: $0 \leq \varphi^p \leq |f|^p \leq \psi^p \leq 1$. Wegen $(x^p)' = p(x^{p-1}) \leq p$ für $x \in [0;1]$ folgt aus dem MWS angewendet auf $[0;1] \to \mathbb{R}, x \to x^p$

$\varphi^p \leq \psi^p$. Also mit 3 folgt $\int(\psi^p - \varphi^p)dx \leq \int p(\psi - \varphi)dx \leq p\frac{\varepsilon}{p}$. $\Rightarrow$ intbar

6) Die Beh. folgt aus 5 und $F \cdot g = \frac{1}{4}((F+g)^2 - (f-g)^2)$. $\square$

<u>15.13. Satz (MWS der Int.rechnung)</u>

Sei $F:[a;b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi:[a;b] \to \mathbb{R}$ int bar. und $\varphi \geq 0$. Dann $\exists\, \psi \in [a;b]$, sodass $\int F(x)\varphi(x)\,dx = F(\psi)\int \varphi(x)\,dx$. Insbesondere $\varphi \equiv 1$ $\exists\, \psi$ mit $\int F(x)\,\varphi(x)\,dx = F(\psi)(b-a)$.

Beweis: Max. und Min. werden von f angenommen.

$M = \sup\{F(x) \mid x \in [a;b]\} = f(x_{max})$

$m = \inf\{ \quad \text{"} \quad \} = f(x_{min})$ Es folgt für $x \in [a;b]$ $m\,\varphi(x) \leq F(x)\,\varphi(x) \leq M\,\varphi(x)$, da $\varphi(x) \geq 0$.

Monotonie: $m \int \varphi(x)\,dx \leq \int F(x)\,dx \cdot \varphi(x) \leq M \cdot \int \varphi(x)\,dx$.

Ist $\int \varphi(x)\,dx = 0$ dann ist nichts zu zeigen. Andernfalls $m \leq \frac{\int F(x)\,dx\,\varphi(x)}{\int \varphi(x)\,dx} \leq M$. Nach dem ZWS ex. ψ zw. x_{min}, x_{max}, sodass $F(\psi) = \frac{\int F(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int \varphi(x)\,dx}$. $\square$

<u>15.14 Definition</u>

Sei $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ eine Fkt. $a = t_0 < \dots t_n = b$ eine Unterteilung $\eta = \max\{t_k - t_{k-1}\}$ die Feinheit der Unterteilung. Der Ausdruck $\sum_{k=1}^{n} F(\psi_k)(t_k - t_{k-1})$ wobei $\psi_k \in [t_k, t_{k-1}]$ heißt eine Riemannsche Summe.

<u>15. 15 Satz</u>

Sei $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ eine intbare Fkt. $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sd. für jede Unterteilung mit Feinheit $\eta \leq \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $\psi_k \in [t_k, t_{k-1}]$. Für die Riemannsche Summe $\left|\sum_{k=1}^{n} F(\psi_k)(t_k - t_{k-1}) - \int F(x)\,dx\right| < \varepsilon$ gilt.

Beweis:

Nach der Intbarkeit ex. TrpFkt. $\varphi \leq F \leq \psi$ mit $\int(\psi - \varphi)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Wir können annehmen, dass ψ und φ bzgl. der gl. Unterteilung definiert sind. Da f beschränkt ist, ist $\sup\{|F(x)| \mid x \in [a;b]\} = M < \infty$. Beh. $\delta = \frac{\varepsilon}{8mM}$ tuts. Sei ... eine

Unterteilung mit $z \leq \delta$. $\psi_k \in [t_k, t_{k-1}]$. Dann gilt für die TrpFkt. F mit $F|_{[t_{k-1}, t_k[} = f(\psi_k)$: $\varphi(x) \leq F(x) \leq \psi(x)$ außer ein Unterteilungspunkt $x_1 \in [t_{k-1}, t_k]$, da φ, F und ψ lokal, konst. sind. Liegt ein $x_1 \in [t_{k-1}, t_k]$ so haben wir noch die Abschätzung $\varphi(x) - 2M \leq F(x) \leq \psi(x) + 2M$.
Da es höchstens $2m$ solche Int. gibt folgt:

$$\int \varphi(x)\,dx - 4m \cdot M\delta \leq \int F(x)\,dx \leq \int \psi(x)\,dx + 4m\delta M$$

$$\Rightarrow \int F(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \text{Riem. S.} \leq \int F(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \ \square$$

15.16 **Bsp:** $F(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$. Eine äquidistante Untert. gibt eine schw. Summe.
Besser geom ~~Reihe~~ Progression $t_k = b^{k/n}$. $t_k - t_{k-1} = b^{k/n} - b^{(k-1)/n}$
$= b^{k/n}(1 - b^{-k/n}) \leq b\,\underbrace{(1 - b^{-k/n})}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$. Stützstellen $\psi_k = t_{k-1}$

$$RS = \sum_{k=1}^{n} \frac{b^{k/n}}{b^{(k-1)/n}} (1 - b^{-k/n}) = \sum_{k=1}^{n} b^{\frac{1}{n}} (1 - b^{-1/n}) = n\, b^{1/n}(1 - b^{-1/n})$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(1 - b^{-x}) \overset{\text{l'hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln b\, b^{-x}}{1} \to \ln(b)$$

$$\Rightarrow \int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) \ \square$$