AnaI

Igor Illegal

M Menge, $\sim$ Äq.R. $\pi : M \Rightarrow M/_{\sim} = \{[a] \mid a \in M\} \subset 2^M$

Bem.: 7.6 Die Abbildung π zeigt: Jede Äq.R ist im prinzip von folgender Bauart:
$F: M \to N$ surjektiv, $m_1 \sim m_2 :\Rightarrow F(m_1) = F(m_2)$ ist. In der Tat $\pi^{-1}([a]) = \{a' \in M \mid a' \in [a]\} = [a]$.

$M = \bigcup_{a \in M} [a]$.

Eine Teilmenge $R \subset M$ heißt vollständiges Repräsentantensystem der Äq.R $\sim$ auf M, wenn $\forall [a] \in M/_{\sim}$ genau ein $r \in R$ mit $r \in [a]$ existiert. $M = \dot{\bigcup}_{r \in R} [r]$

Zurück zu $\mathbb{Q}$: $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a'b = ab'$.
Dies ist eine Äq.R. $\mathbb{Q} := M/_{\sim}$ $(\subset 2^M)$ und $\frac{a}{b} := [(a,b)]$.
In diesem Fall gibt es ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem.
$R = \{(a,b) \mid b > 0, a \text{ und } b \text{ teilerfremd}\}$. Die Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definieren wir Repräsentantenweise

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = [(ad+bc, bd)]$$

$$\begin{matrix} (a,b) & (c,d) & & \| \\ \wr & \wr & & \\ (a',b') & (c',d') & \Rightarrow & [(a'd' + b'c', b'd')] \end{matrix}$$

<u>Problem:</u>

Es ist nicht unmittelbar klar, dass die Summe wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad !$$
$$\frac{2}{4} + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{30}{36}$$

Sei also $(a',b') \in \frac{a}{b}$ ein weiterer Repräsentant. Dann gilt $(a',b') \sim (a,b) \Leftrightarrow a'b = ab'$. Zz. $(a'd + b'c, b'd) \sim (ad + bc, bd)$

$\Leftrightarrow (a'd + b'c) bd = (ad + bc) b'd$

$\Leftrightarrow a'dbd = adb'd$

$\Leftrightarrow d^2(a'b - ab') = 0 \;;\; d \neq 0$

$\Leftrightarrow a'b - ab' = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Genauso zeigt man die Unabhängigkeit der Summe von der Wahl $(c', d') \in \frac{c}{d}$. Man sagt $+$ ist wohldefiniert. Genau so zeigt man $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ist wohldefiniert.

Körperaxiome

Ass, Kom., Distributiv folgen aus den entsprechen Eigenschaften von $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

Satz 7.7

$\mathbb{R}$ ist durch die Axiome I – III, A, AA, VA eindeutig bestimmt.

Bew: Sei $\mathbb{R}'$ ein weiterer Körper, der den Axiomen genügt. Wir werden eine bijektive Struktur erhalten Abbildung $\varphi: \mathbb{R}' \to \mathbb{R}$ konstruieren. $a, b \in \mathbb{R}'$ $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

$a > b \Leftrightarrow \varphi(a) > \varphi(b)$.

Dazu betrachten wir $1_{\mathbb{R}'}$ und die Abbildung

$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}'$

$$n \longmapsto n \cdot 1_{\mathbb{R}'} := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 1_{\mathbb{R}'} & , n > 0 \\ \sum_{k=1}^{|n|} -1_{\mathbb{R}'} & , n < 0. \end{cases}$$

Wegen der Anordnung ist $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}'$. Weiter
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathbb{Q} \arrow[d] \\ & \mathbb{R}' \end{tikzcd}$$
definieren $1: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}'$

$$\frac{a}{b} \longmapsto \frac{a 1_{\mathbb{R}'}}{b 1_{\mathbb{R}'}}.$$

Also
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Q} \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{Q} \arrow[d, hook] \\ \mathbb{R}' \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\lim \sqrt{8'} = 3$
$8 \to 9$

Suchen φ. Sei $a \in \mathbb{R}'$ beliebig, dann existiert eine Folge (a_n) rationaler Zahlen in $\mathbb{R}'$ mit $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Die (a_k) bildet also eine Cauchy-Folge. Wegen dem AA ist eine Folge (b_k) eine Cauchy-Folge, genau dann, wenn $\forall N \in \mathbb{N}$ ein n_0 existiert s.d.: $|b_n - b| < \frac{1}{N}$ $\forall n \geq n_0$. Es sei nun $\varphi(a_k)$ das Bild m $a_k \in \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $(\varphi(a_k)) \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge. Nach dem VA existiert $\lim \varphi(a_k) \in \mathbb{R}$. Das definiert und die Abbildung φ. Wir müssen uns noch überlegen, dass $\varphi(a)$ nicht von der Wahl der rationalen Folge (a_k) mit $\lim a_k = a$ abhängt. Wegen den Rechenregeln für GW ist die Differenz $(a_k - a'_k)$ für zwei Folgen $(a_k)(a'_k)$ mit $\lim a_k = \lim a'_k$ eine Nullfolge, d.h. konvergiert gegen Null $(\varphi(a_k) - \varphi(a'_k)) = \varphi(a_k - a'_k)$ ist dann eine NullFolge in $\mathbb{R}$ und $\lim \varphi(a_k) = \lim \varphi(a'_k)$ Folgt aus den Rechenregeln.

$\varphi(a) < \varphi(b) \Leftrightarrow a < b$ sei ihnen überlassen.

$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ folgt aus den Rechenregeln für GW. Damit ist $\mathbb{R}$ eindeutig definiert. □

Bew/Bem:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\ \mathbb{Q} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \mathbb{Q} \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\exists!\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

7.8. Existenz von $\mathbb{R}$

Nach dem Vorangegangen Satz ist es egal wie wir uns von der Existenz von $\mathbb{R}$ überzeugen. Zwei Konstruktionen von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ sind gebräuchlich:

A) Cauchy-Folgen modulo NullFolgen.

B) Dedekindsche Schnitte.

Beide Methoden werden wir kurz skizzieren.

7.9. Definition

Eine NullFolge (a_n) ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

Wir betrachten jetzt:

$M = \{(a_n) \mid (a_n)$ ist eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen$\}$

$= \{(a_n)_{\in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}} \mid \forall N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \frac{1}{N} \ \forall m, n \geq n_0\} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \to \mathbb{Q}\}$.

Wir definieren auf M eine Äq.R. wie folgt: $(a_n), (b_n) \in M$. $(a_n) \sim (b_n)$ falls $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist. Wir definieren $\mathbb{R} := M/_\sim$.

Addition und Multiplikation definieren wir repräsentanten Weise: $[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)]$. Dies ist wohldefiniert, da die Summe zweier NullFolgen eine NullFolge ist. $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$. Die Multiplikation ist wohl definiert, da das Produkt einer NullFolge mit einer beschränkten Folge eine NullFolge ist.

Mit diesen Verknüpfungen wird $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper:
Die Null $0_{\mathbb{R}}$ ist durch die Konstante Folge (0) repräsentiert.
$1_{\mathbb{R}}$ durch die Konstante Folge (1). Ist $[(a_n)] \neq 0$, also (a_n) eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen die keine Nullfolge ist, dann existiert $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| > \frac{1}{N}$ für unendlich viele n. Zu $\frac{1}{2N}$ $\exists$ ein n_0 sodass $|a_n - a_m| < \frac{1}{2N}$ $\forall n \geq n_0$. Wähle $n_1 \geq n_0$ sodass $|a_{n_1}| > \frac{1}{N} \Rightarrow |a_m| \geq |a_{n_0} + a_m - a_{n_0}| \geq |a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}| \geq \frac{1}{N} - \frac{1}{2N} = \frac{1}{2N}$ $\forall m \geq n_0$. Wir setzen

$$b_n = \begin{cases} 1 & , n < n_0 \\ \frac{1}{a_n} & , n \geq n_0 \end{cases}$$

Dann ist (b_n) eine Cauchy-Folge (Rechnung wie beim Beweis von Konvergenz von $(\frac{1}{a_n})$ falls $\lim a_n \neq 0$) und $[(a_n)]^{-1} = [(b_n)]$ In der Tat

$$a_n \cdot b_n = \begin{cases} a_n & n < n_0 \\ 1 & n \geq n_0 \end{cases} \qquad [(a_n \cdot b_n)] = [(1)].$$

Schließlich zum VA. Ist $(a_k) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ eine Cauchy-Folge mit $a_k \in M_{\mathbb{R}}$ repräsentiert durch (a_{kn}) $a_k = [(a_{kn})_{n \in \mathbb{N}}]$ damit ist die Diagonalfolge $(a_{nn})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge und $\lim_{k \to \infty} a_k = [(a_{nn})]$. (Details fehlen).

B) Dedekindsche Schnitte

7.10 Definition

Ein dedekindscher Schnitt ist eine disjunkte Zerlegung $U \dot\cup V = \mathbb{Q}$ mit $U, V \neq \emptyset$, sodass $u < v$ $\forall u \in U \forall v \in V$.

Beispiel: $r \in \mathbb{Q}$ $U_r = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}$ $V_r = \{v \in \mathbb{Q} \mid r < v\}$. (U_r, V_r) nennen wir einen guten gewählten rationalen dedekindschen Schnitt, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$ ist ein schlecht gewählter rationaler dedekindscher Schnitt. Dedekindsche Schnitte die anderer Art sind, nennt man irrationale dedekindsche Schnitte. Wir definieren $\mathbb{R} = \{$gut gewählte rationale Dedekindsche Schnitte$\} \cup \{$irrationale Dedekindsche Schnitte$\} \subset 2^{\mathbb{Q}} \times 2^{\mathbb{Q}}$. Man kann die Verknüpfung auf $\mathbb{R}$ anfolgen level Dedekindsche Schnitte erklären $\mathbb{R}' = \frac{\text{Cauchy-Folgen}}{\text{Nullfolgen}} \to$ Dedekindsche Schnitte

$r \mapsto (U_r, V_r) = (\{x \in \mathbb{Q} \mid x \le r\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\})$

Der Nachweis der Axiome von $\mathbb{R} = \{$ Dedekindsche Schnitte $\}$ ist länglich, aber nicht schwierig. Referenz: Landau.

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

7.11. Definition

Eine Menge M ist/heißt abzählbar wenn es eine surjektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \to M$ gibt.

Bsp: 1) Jede endliche Menge ist abzählbar.

2) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar $\{0; 1; -1; 2; -2; \dots\}$

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} n, & n \% 2 = 0 \\ -\frac{1}{2}(n-1), & n \% 2 = 1 \end{cases}$$

3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar

$$\begin{array}{llll}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) \dots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \dots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\
(3,0) & (3,1) & \dots &
\end{array}$$

Das Diagramm definiert eine Abbildung.

Bem: Ist M abzählbar unendlich, dann gibt es auch eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}_{\ge 1} \to M$.

Bew: Sei $\varphi: \mathbb{N}_{\ge 1} \to M$ surjektiv. Wir definieren rekursiv mit Start $n_1 = 1$, $\varphi(n_1) = \varphi(1)$ wie folgt. Sind $n_1, \dots, n_k$ schon definiert mit $\psi(l) = \varphi(n_l)$ paarweise verschieden so definieren wir $n_{k+1} = \min\{n \mid \varphi(n) \notin \{\psi(1), \dots, \psi(k)\}\}$ und setzen $\psi(k) = \varphi(n_{k+1})$

$\psi: \mathbb{N}_{\ge 1} \to M$ bijektiv.