15.16. Definition

Sei $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a;b]$ heißt Stammfkt. von f, wenn F diffbar ist und $F'=f$. Eine SF ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Idee von Newton & Leibniz ist nun das Integral $\int_a^x f(t)dt$ mit variabler Obergrenze zu betrachten.

Dazu:

Definition

$f: I\to\mathbb{R}$ stetig $a,b\in I$, $a<b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Dann gilt $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$. $\forall a,b,c\in I$

15.17 Satz (Hauptsatz der Diff. und Intrechnung)

Sei $f: I\to\mathbb{R}$ eine stetige Fkt. auf einem Intervall I.

Dann gilt: 1) Für $a\in I$: $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ ist SF.

2) Ist G eine SF von f auf I, so ist $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$ $\left(=: G(x)\Big|_a^b\right)$.

Beweis: 1) Für den Diffquot. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ $\overset{MWS}{=} f(\varphi)\cdot\frac{1}{h}\cdot h = f(\varphi)$, wobei $\varphi\in\,]x;x+h[$. Mit $h\to 0$ $\varphi\to x$ und da f stetig folgt $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ $=\lim\limits_{\varphi\to x} f(\varphi) = f(x)$.

2) Sei G eine bel. SF. Dann gilt: $(G-F)' = f-f = 0$ $\Rightarrow G-F = c$ konst. Fkt. Also $G(b)-G(a) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$. $\square$

15.18. Bemerkung

Wegen dem Hauptsatz genügt es um $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen eine SF zu bestimmen. Ist F eine SF so schreiben wir

$F(x) = \int f(x)\,dx \leftarrow$ unbest. Integral.

ist eine SF von f

Ich habe eine Abzählung für $\mathbb{R}$ gefunden, aber der Rand ist zu klein um sie aufzuschreiben.

Beispiele: 1) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ hat die SF:

$F(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ldots + a_0 x.$

2) $\int x^k dx \quad k \in \mathbb{R}, x > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} x^{k+1} \quad k \neq -1.$

$\Rightarrow \ln(x)$

3) $\sin \Rightarrow \cos$, $\cos \Rightarrow -\sin$.

4) $e^x \Rightarrow e^x$

5) $\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan$

6) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \arcsin$

Jede Ableitungsregel gibt eine Int. regel.

15.18. Satz (Substitution)

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ stetige Fkt. auf einem Intervall.

$\varphi: [a;c] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. $\varphi([a;c]) \subset [a;b]$.

$\alpha = \varphi(a)$, $\gamma = \varphi(c)$. Dann gilt: $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_a^c f(\varphi(t))dt \cdot \varphi'(t)$.

Beweis: F ist SF von f. Dann hat $F \circ \varphi$ die Ableitung

$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$= F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$ $\square$

Oft: $x = \varphi(t)$; $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$ Leibnizschreibweise. "$dt\,\varphi'(t) = dx$"

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

15.19 Beispiele:

1) $\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt$

$t = x + c$

$x = t - c$, $dx = dt \Rightarrow$ s. Substitution.

2) Für $c \neq 0$ gilt $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx$

$x = \varphi(t) = c \cdot t$; $dx = dt \cdot c$, $\alpha = \varphi(a) = a \cdot c$ analog b.

3) $\varphi: [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in [a;b]$

$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = (\ln(|\varphi(t)|))_a^b = \ln(|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}|).$

Beweis: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = \binom{+}{(-)}\varphi(t)$, φ hat auf $[a;b]$ das gl. VZ. $\square$

4) $[a;b] \subset]-\pi/2; \pi/2[$: $\int_a^b \tan(x)dx = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \ln(\cos(x))_a^b.$

5) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$. Idee: Partialbruchzerlegung.

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} \Rightarrow \alpha(1+x) + \beta(1-x) = 1 \Rightarrow LGS: \alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

$\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$

15.20 Satz (Partielle Int.)

$f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.

$\int_a^b f' g \, dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f g' \, dx$

Beweis: Produktregel. $\square$

15.21. Beispiel

a) $\int \ln(x) \cdot 1 \, dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \cdot (\ln(x) - 1)$ $\square$

b) $\int x \cdot \sin(x) = -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) dx = -x\cos(x) + \sin(x)$ $\square$

c) $\int \sin^2(x) = -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int -\cos^2(x) dx$

$\Rightarrow 2\int \sin^2(x) = -\cos(x)\sin(x) + x$

$\Rightarrow \int \sin^2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2(x) = \pi$

d) $\int \sin(x)\cos(x) dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)$

$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x) dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$. $\square$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2(x) = \frac{1}{2}\cos^2(x) + c \quad , c = \frac{1}{2}$ ok.

15.22 Welche Fkt sind "elementar" intbar?

Bsp: $\int x^n e^x \to n$-mal Part.

$\int x^n \sin(x)$ ''

$\int x e^{x^2} \to \frac{1}{2} e^{x^2}$ (Subst.)

$\int e^{x^2} \to$ lässt sich nicht durch geschl. Formel darstellen.

Definition

Die Menge der element. Fkt ist wie folgt charakterisiert:

1) $c, x, e^x, \sin, \cos, \tan$ und f^{-1} sind elem.

2) f, g elem $\to f/g, f \cdot g, f + g$ elem.

3) $f \circ g$ elem., f, g elem.

15.23.

Rat. Fkt sind elem. intbar mit Hilfe von PBZ.

Bsp: $\int \frac{1+x}{x^3+x}\,dx$

$\frac{1+x}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1} \Rightarrow 1+x = A(1+x^2) + (B+Cx)x$

$\Rightarrow A=1,\ B=1,\ C=-1$

$\int \frac{x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln(x) + \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x$

Allgemein: $F(x) = g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$ $g, p, q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p < \deg q$.

1) Zerlege den Nenner: $q(x) = \prod_{i=1}^{r_1} (x-x_i)^{e_i} \cdot \prod_{j=1}^{r_2} q_j(x)^{F_j}$, q_j quad Poly. mit paarweise komplex. NST.

2) Ansatz $\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r_1} \frac{a_i(x)}{(x-x_i)} + \sum_{j=1}^{r_2} \frac{b_j(x)}{q_j(x)}$ mit $\deg a_i < e_i$, $\deg b_j < 2F_j$.

lösen mit Koeff.vergleich: $\sum_{i=1}^{r_1} e_i + \sum_{j=1}^{r_2} 2F_j = \deg q$ viele Koeff.

3) Lösen nach Transformation der 1) & 2) wie oben.

$\int \frac{1}{x}\,dx, \ldots, \int \frac{1}{x^n} = \ln(|x|) + \ldots + \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$

b) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\quad \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$

$\quad$ || arctan $\quad$ || $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ $\quad$ || $\frac{c}{(1+x^2)^{n-1}}$

$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x \cdot x}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - x\frac{c}{(1+x^2)^{n-1}} + d\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$

$\rightarrow$ Rekursionsformel.