Igor Schlegel

7.11 Satz

Sei $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. Dann ist auch M abzählbar.

Beweis: Sei $\varphi_k : \mathbb{N} \to M_k$ eine Abzählung von M_k (surj. Abb.) und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $n \mapsto (\psi_1(n), \psi_2(n))$. Dann ist $\Phi : \mathbb{N} \to M$ mit $\Phi(n) := \varphi_{\psi_1(n)}(\psi_2(n))$ eine Abzählung von M. □

7.12 Corollar

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: Sei $M_k := \{ \frac{n}{k} \mid n \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to M_k$ liefert eine Abzählung. Und $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. □

7.13 Definition

Eine nicht abzählbare Menge nennt man überabzählbar.

7.14 Satz von Cantor

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $[0;1[$ überabzählbar ist. Angenommen: $\mathbb{N} \to [0,1[$, $n \mapsto a_n$ ist eine Abzählung. Mit Cantors Diagonalelement konstruieren wir ein $c \in [0;1[$ welches im Bild nicht vorkommt: Wir betrachten die Dezimalbruchentwicklung der a_n: $a_n = 0{,}a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{nk}$ mit $a_{nk} \in \{0;\ldots;9\}$ die k-te Nachkommastelle/Ziffer von a_n. Dann sei $c = 0{,}c_1 c_2, \ldots, c_n, \ldots \in [0;1[$ die reelle Zahl mit Ziffern $c_k = \begin{cases} 1 & a_{kk} \neq 1 \\ 0 & a_{kk} = 1 \end{cases}$. Dann ist $c \neq a_n$, da für die n-te Ziffer $c_n \neq a_{nn}$ gilt. c liegt also nicht im Bild, was der Existenz der Abzählung $n \mapsto a_n$ widerspricht. □

7.15 Bemerkung

Die Mengenlehre von Cantor beschäftigt sich mit beliebig großen Mengen.

7.16. Definition

M, N zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive

Abbildung $\varphi: M \to N$ existiert. M heißt wenigstens so mächtig wie N, wenn es eine surjektive Abbildung $\varphi: M \to N$ gibt.

Beispiele: 1) Je zwei abzählbar unendliche Mengen sind gleichmächtig.

2) 2^M ist stets wenigstens genauso mächtig wie M, aber nicht gleichmächtig.

Man kann mit Hilfe des Auswahlpostulats zeigen, dass "M wenigstens so mächtig wie N" und "N wenigstens so mächtig wie M" "M gleichmächtig wie N" impliziert. Dabei ist das Auswahlpostulat folgendes Axiom der Mengenlehre

7.17 Auswahlpostulat

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht leeren Mengen. Dann existiert eine Abbildung $a: I \to \bigcup_{i\in I} M_i$, sodass $a(i) \in M_i$ ist. Mit anderen Worten, wir können mit a aus den M_i gleichzeitig je ein Element auswählen.

7.18 Satz/Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge. Dann hat M eine kleinste obere Schranke.

D.h. eine obere Schranke $A \in \mathbb{R}$, sodass $A \leq A'$ $\forall$ anderen oberen Schranken. Wir nennen A das Supremum von M. $\sup(M) := A$.

Analog definiert man für nach unten beschränkte nichtleere Teilmengen M das Infimum $\inf(M)$ als größte untere Schranke.

Beweis der Existenz: Sei A_0 eine obere Schranke von M, d.h. $a \leq A_0$ $\forall a \in M$ und sei $A_0 \in M$. Wir definieren induktiv zwei Folgen (a_n) von Elementen aus M und (A_n) von oberen Schranken (monoton fallend) von M mit $A_n - a_n \leq 2^{-n}(A_0 - a_0)$. Da $0 \leq A_n - a_n \leq 2^{-n}(A_0 - a_0)$ und dann sind (A_n) und (a_n) beschränkte monotone also auch konvergente Folgen, dann gilt $\lim a_n = \lim A_n = a$ und a ist das gesuchte Supremum. Bleibt die rekursive Wahl der Folgen:

Seien a_n, A_n schon gewählt, dann wählen wir

$$A_{n+1} = \begin{cases} \frac{A_n+a_n}{2} & \text{Falls dies obere Schranke ist,} \\ A_n & \text{Sonst.} \end{cases} \quad a_{n+1} = \begin{cases} \text{ein Element von M welche} > \frac{A_n+a_n}{2} & \text{Falls } \frac{A_n+a_n}{2} \text{ keine obere Schranke von M ist} \\ a_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $A_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(A_n - a_n) \leq 2^{-n+1}(A_0 - a_0)$ $\square$.

7.19 Definition

Sei (a_n) eine Folge. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Bsp: $((-1)^n)$ hat die HP ± 1.

Sei (a_n) nach beschränkt, dann $\sup\{a_k \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$ heißt Limes superior der Folge a_n. Analog ist der limes inferior durch $\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \lim \inf \{a_k \mid k \geq n\}$ definiert.

8. Reihen

8.1 Definition

Sei (a_k) eine Folge reeller Zahlen. Die Folge s_n der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ nennen wir eine Reihe, die wir mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnen. Ist die Folge (s_n) konvergent mit GW $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ so verwenden wir für den GW die Notation $s = \sum_{k=0} a_k$. Also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen:

1) die Folge der Partialsummen.

2) Der GW, sofern er existiert.

Häufig treten Folgen in der Form von Reihen auf.

Bsp: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

3) Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist mit $a_0 = c_0$ und $a_k = c_k - c_{k-1}$ für $k \geq 1$ eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ definiert deren Partialsummen $s_n = c_n$. Also Reihen sind nichts neues.

4) Teleskop Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1.$$

Beweis: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow s_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1}$ $\lim_{k\to\infty} s_k =$

$\lim_{k\to\infty} (1-\frac{1}{k+1}) = 1$ $\square$

8.3 Satz (Cauchy Kriterium für Reihen)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Die Reihe konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon\ \forall m > n \geq n_0$. Insbesondere bilden (a_n) für konvergente Reihen eine Nullfolge.