1 I Mengen, Logik und Beweismethoden

Igor Schlegel

1.1 I.3. Definition: Eine Menge M ist eine Ansammlung von wohlbestimmten Elementen.

Bsp: Die Buchstaben des Alphabets

$A = \{a, b, c, \dots, z\}$

$B = \{$ Hörer dieser Vorlesung $\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\} = \{p \text{ Primzahl} \mid p < 8\}$

Mengen lassen sich durch Aufzählen der Elemente oder durch eine charakterisierende Eigenschaft spezifizieren.

Spezielle Mengen:

$\emptyset = \{\}$ Leere Menge

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \dots\}$ $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3 \dots\}$ nat. Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \{$ nicht notwendig periodische Dezimalzahlen

Ist x ein Element von M: $x \in M$ ($x \notin M$ x ist kein Element von M)

Ist jedes Element einer Menge ~~M~~ N auch ein Element einer Menge M so ~~sagen~~ schreiben wir: $N \subset M$ („Teilmenge")

Häufig findet man $N \subseteq M$. Dies verwenden wir nicht.

Wollen wir sagen $N \subset M$, $N \neq M$ (echte Teilmenge) so schreiben wir: $N \subsetneq M$. $N \not\subset M$ heißt N ist keine Teilmenge von M.

$M \ni x$ heißt M enthält x.

1.2 I.4. Mit $|M|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von M.

$|\emptyset| = 0$ $|\{0\}| = 1$

$|\{a, b, c, \dots, z\}| = 26$

Hat M unendlich viele Elemente so schreiben wir $|M| = \infty$.

Andere Schreibweise $\#M := M$

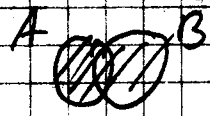
Bsp: $\#\{\text{Hörer dieser Vorlesung älter als } 40\} = 0$?

1.3 Durchschnitte, Vereinigung und Komplemente

A, B zwei Mengen

$A \cap B = \{a \mid a \in B \text{ und } a \in A\}$

→ Durchschnitt von A und B



$A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ oder } a \in B\}$

→ Vereinigung von A und B

$A \cup B$ heißt disjunkte Vereinigung, wenn $A \cap B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$ dann sagt man A und B sind disjunkt.

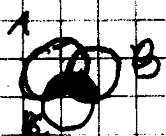
Für disjunkte Mengen gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Allgemein:

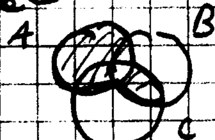
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$ da in $|A| + |B|$ die Elemente von $A \cap B$ doppelt gezählt werden.

Distributivgesetze



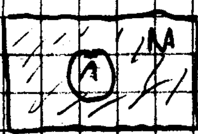
$(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Betrachten wir lediglich Teilmengen einer festen Menge M so ist $A \subset M$ das Komplement durch

$\bar{A} = \{x \in M \mid x \notin A\}$



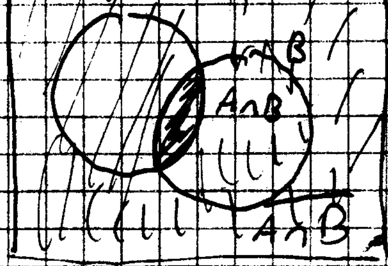
Gesetze von De Morgan

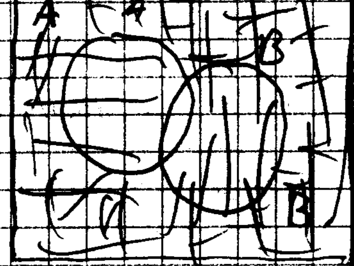
$A, B \subset M$ Dann gilt

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

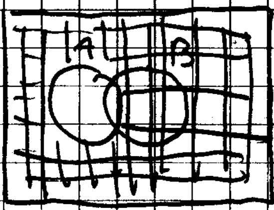
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

und ferner $\bar{\bar{A}} = A$.





$\overline{A \cup B} =$



$A \setminus \{A \cap B\}$

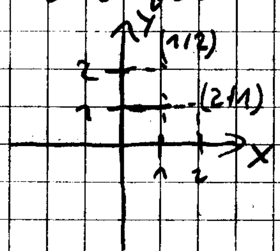
Allgemeiner: A,B Mengen $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ heißt Differenz von A und B, besser A ohne B.

1.4. Kartesische Produkte, Potenzmenge

Sind A,B Mengen, so bezeichnet $A \times B$ die Menge der Paare | $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ die geordnet sind (a,b).

Bsp: • $\{a, b, \dots, h\} \times \{1, 2, 3, \dots 8\}$ ist im Schach gebräuchlich.

Mit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \{(x|y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ lassen sich Punkte in der Ebene spezifizieren



Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Sei M eine feste Menge, dann heißt $2^M = P(M) = \{A \mid A \subset M\}$ die Potenzmenge von M, die Menge aller Teilmengen.

1.5 Satz: Ist M eine endliche Menge, dann gilt $2^M = 2^{|M|}$.

Mit anderen Worten: Eine Menge M mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen.

Bsp: $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$; $2^0 = 1$, ok.

$2^{\{1\}} = \{\emptyset; \{1\}\}$; $2^1 = 2$, ok.

$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$ $2^2\ 2$, ok.

Wie können wir das beweisen?

Zwei allgemeine Beweismethoden werden wir in diesem Paragraphen ansprechen.

1. Widerspruchsbeweis
2. Vollständige Induktion

Satz 1.5 beweist man durch vollständige Induktion.

Trotzdem zunächst ein Widerspruchsbeweis.

Sei: A eine Aussage. Wir wollen A beweisen, dazu zeigen wir die Aussage "A gilt nicht" ist falsch, indem wir aus "A gilt nicht" einen Widerspruch herleiten. (Dann muss A wahr sein).

Bsp: Erinnerung eine Primzahl p ist eine nat. Zahl $p \geq 2$ die außer 1 und p keine weiteren Teiler hat.

1.7 Satz: Es gibt unendlich viele verschieden Primzahlen.

Beweis (Euklid): Angenommen es gibt endlich viele Primzahlen $p_1, \dots p_n$. Wir betrachten das Produkt $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ und die Zahl $m+1$. Keine der Zahlen $p_1 \dots p_n$ sind Faktoren von $m+1$ da bei Division mit Rest der Rest 1. Ist q ein Primfaktor von $m+1$, dann ist q eine Primzahl in der Liste $P_1 \dots P_n$ nicht vorkommt, es kann nicht nur endliche viele Primzahlen geben. $\square$

1.8. ~~Angen~~ Aussagenlogik: In komplizierten Beweisen ist es nützlich knappe eine knappe logische Notation zu haben.

Sind A und B Aussagen, die wahr oder falsch sein könnten, dann bezeichnet:

$A \land B$ die Aussagen A und B sind wahr

$A \lor B$ die Aussage A oder B (oder Beide) sind wahr.

$A \Rightarrow B$ (A impliziert B) die Aussage A ist wahr, dann ist auch B wahr

$A \Leftrightarrow B$ (A äquivalent zu B) die Aussage A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist.

$\neg A$ (nicht A) Aussage A ist falsch.

Einige Gesetze der Logik:

Wenn $A \Rightarrow B$ gilt und $B \Rightarrow C$ gilt, dann gilt auch $A \Rightarrow C$, knapper:

$$[(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$$

Mit anderen Worten: egal ob A, B, C jeweils wahr oder falsch sind, die obige Aussage immer wahr ist, eine sog. Tautologie.

$A \Rightarrow B$ darf man mit $B \Rightarrow A$ nicht verwechseln.

Bsp:

A = die Schranke ist zu

B = ein Zug fährt durch

Dann ist $A \Rightarrow B$ falsch, weil die Schranke früher geschl. werden könnte.
$B \Rightarrow A$ ist hoffentlich wahr.

Dann gilt: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

1.9. Gesetze von de Morgan

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

Um Klammerung zu vermeiden führen wir ein:

$\neg$ hat die größte Bindungskraft

$\wedge$; $\vee$ hat mittlere "

$\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$ oder $=$ hat die geringste.

Dies erlaubt einige Klammer wegzulassen

Wollen wir uns von der Wirklichkeit der log. Gesetze überzeugen, so können wir uns vorstellen, dass A und B Aussagen sind, die wahr oder falsch seien bzw. Variablen sind, die Werte falsch = 0 und wahr = 1 annehmen können. Die Verknüpfungen sind in der Verknüpfungstafel spezifiziert.

$A \wedge B$		B: 0	1
A	0	0	0
	1	0	1

$A \vee B$		B: 0	1
A	0	0	1
	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B
0	0
1	0
0	1
1	1

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

1.10 Distributivgesetz

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $\wedge$ = und

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\vee$ = oder

~~1.11~~ Kommutativ $A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$

~~1.12~~ Assoziativ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$ für $\wedge$ analog

1.11 Mit dem Aussagenkalkül lassen sich logische Gesetze nachrechnen

Bsp:

$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

"

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow \neg A \vee C$

"

$\neg[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)] \vee \neg A \vee C$

"

$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg A \vee C$

"

$(A \vee \neg B) \vee (B \vee \neg C) \vee \neg A \vee C$

$= (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee ((B \wedge \neg C) \vee C)$

$= (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee ((B \vee C) \wedge (\neg C \vee C))$

$= 1 \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee ((B \vee C) \wedge 1)$

$= (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) = \neg A \vee (\neg B \vee B) \vee C$

$= \neg A \vee 1 \vee C = 1$ □

Bemerkung: $A\ B\ C$ ... log. Variable

Ausdruck der Form

$(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_4 \vee X_5 \vee X_6) \wedge \dots \wedge ()$ konjunktive Normalform

wobei $X_i \in \{A, \neg A, B, \neg B, \dots\}$

$(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \vee (X_{k+1} \wedge \ldots X_{k+l}) \vee \ldots \vee (\quad)$ disjunktive Normalform

1.12 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jede nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.

~~Angenommen~~ Wenn gilt:

1) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr

2) Induktionsschritt: für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

$$A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

1.13 Beispiel: Es sei $A(n)$ die Aussage. "Eine Menge M mit genau n Elementen genau 2^n Teilmengen".

Beweis: Mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Gilt $|M|=1$ dann ist $|2^M|=2$. In der Tat
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $M=\{1\}$ und dann gilt $2^M=\{\emptyset; \{1\}\}$ hat zwei Elemente.

Induktionsschritt: Die Aussage sei für n-Elementige Mengen schon bewiesen. Es sei $M=\{1,2,\ldots,n+1\}$ eine Menge mit $n+1$ Elementen.

$$2^M = \{A \subset \{1;2;\ldots;n+1\}\} = \{A \subset M \mid A \not\ni n+1\} \,\dot\cup\, \{A \subset M \mid A \ni n+1\}$$
$$= \{A \subset \{1;2;\ldots;n\}\} \cup \{A = A' \cup \{n+1\} \mid A' \subset \{1,2,\ldots,n\}\}$$
$$\Rightarrow |2^M| = |\{A \subset \{1,2,\ldots,n\}\}| + |\{A' \subset \{1,2,\ldots n\}\}| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$

Vollständige Induktion taucht häufig bei dem Beweis von Summen oder Produktformeln auf.

1.14 Summen und Produktzeichen

Es seien $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$.

Dann bezeichnet:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

die Summe a_k ~~bis~~ von 1 bis n und $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$. nach Konv. analog:

$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ und $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1$ nach Konv.

Die Konvention über die leere Summe bzw das leere Prod
machen wir damit die Formel
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot a_n$$
bzw $\sum$ analog
Beispiel Fakultät
$$\prod_{k=1}^{n} k = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$
$0! = 1$ nach Konvention.
1.15 Beispiel
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{100} k = 5050$$
Beweis durch vollständige Induktion.
Anfang: $A(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ok.
Induktionsschritt $n \to n+1$
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$
$$\overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n+1}{2}(n+2) \text{ ok.}$$
1.16 Definition die Anzahl der k-Elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge etwa $M = \{1; 2; \ldots n\}$
$$\binom{n}{k} = |\{A \subset \{1; 2; \ldots n\} \mid |A| = k\}|$$
n über k oder aus n wähl k.
1.19 Satz Für $0 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Beweis Mit Induktion nach n.
$n = 0$ $M = \emptyset$, M enthält genau eine Menge mit 0 Elementen
$\emptyset \subset M$.
Also $\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0! \cdot 0!}$
Induktionsschritt: Für Teilmengen in $\{1, \ldots, n\}$ sei die Aussage bewiesen. Wir betrachten $\{A \subset \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| = k\}$.
Für $k = 0$ gilt $\{A \in 2^{\{1, \ldots, n+1\}} \mid |A| = 0\} = \{\emptyset\}$. Hat also ein Element. Deshalb $\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1$.

Sei: $k \geq 1$

$\{A \in 2^{\{1,\dots n+1\}} \mid |A| = k\} = \{A' \subset \{1, \dots n\} \mid |A| = k\} \cup \{A' \cup (n+1) \mid A' \subset \{1, \dots n\}, |A'| = k-1\}$

$\Rightarrow \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Also $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$

$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!} \cdot (n-k+1+k) = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}$.

wie gewünscht

1.16 Satz

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1) \cdot \frac{1}{6}$$

Beweis: Induktion nach n.: $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6}$. ok.

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6)$$

$$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{n+1}{6}(n+2)\,(2(n+1)+1) \quad \square$$