16. Uneigentliche Integrale

Sei: $f: [a; \infty[\to \mathbb{R}$ stetig $\int_a^\infty f(x)dx = ?$

16.1 Definition

f heißt über $[a;\infty[$ uneigentlich intbar, wenn $\lim_{\infty} \int_a^b f(x)dx$ existiert. Ist dies der Fall so setzen wir $\int_a^\infty f(x)dx = \lim \int_a^b f(x)dx$

16.2. Bsp:

$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}(-e^{-x}(\sin(x)+\cos(x)))$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ✓

Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt über ganz $\mathbb{R}$ uneigentlich intbar wenn

$\lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$ und $\lim_{a\to\infty(-1)b} \int_a^c f(x)dx$ existieren und dann

$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx) = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int f(x)dx$.

Bem. $\exists \lim \int_{-b}^b f(x)dx \overset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow} \int_{-\infty}^c f(x)dx$ und $\int_c^\infty f(x)dx$ ex.

16.3. Bsp

a) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} = 2\arctan(\cdot) = \pi$

16.4. Integrale auf offenen Intervallen

$f:]a;b] \to \mathbb{R}$ stetig heißt über $]a;b]$ intbar, wenn

$\lim_{t\searrow a} \int_t^b f(x)dx$ existiert und dann: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\searrow a} \int_t^b f(x)dx$.

Bsp:

$\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}}$

$= \begin{cases} \text{ex. nicht} & s>1 \\ \text{"} \quad \text{"} & s=1 \\ \frac{1}{1-s} & s<1 \end{cases}$

16.5. Integralkriterium für Reihen

Sei: $f: [0;\infty[\to \mathbb{R}$ eine monotone fallende pos. Fkt. Die Reihe $\sum_{n\geq 0}^\infty f(n)$ konv. $\Leftrightarrow \int_0^\infty f(x)dx$ konv.

Beweis: Da f mf ist $\sum_{n=0}^N f(n)$ eine OS von $\int_0^{N+1} f(x)dx$ und $\sum_{n=1}^{N+1} f(n)$ ist US.

Ist $\sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty$ dann bleibt $\int_0^{N+1} f(x)dx$ beschränkt, also dass uneig. Int. existiert. Andererseits $\sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^{N+1} f(x)dx \leq \int_0^\infty f(x)dx < \infty$

impliziert die Konvergenz der Reihe. □

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^{\infty} < \infty \Leftrightarrow s > 1$.

Der GW definiert $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die Riemannsche Zetafkt.

§17 Taylorpolynom / Taylorreihen

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar, $x_0 \in I$. Wir wollen f durch ein Polynom nahe x_0 gut approx.. „Beste" Approx. durch ein lin. Polynom ist die Tangente $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

17.1 Definition

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar, $x_0 \in I$. Dann heißt $(T_{x_0}^n f)(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ das n-te Taylorpoly. von f in x_0. $T_{x_0}^n f$ und f haben den gleichen Wert und gleichen n höhere Ableitungswerte in x_0: $f^{(j)}(x_0) = (T_{x_0}^n f)^{(j)}(x_0)$

17.2 Satz (Taylorsche Formel)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig diffbar, $x_0 \in I$. Dann gilt $f(x) = (T_{x_0}^n f)(x) + R_{n+1}(x)$ mit Restglied $R_{n+1}(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$. Beweis:

I.A.: $n=0$: gilt nach HS. $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\,dt$.

I.S: $n \to n+1$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x \underbrace{f^{(n)}(t)}_{u} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{v'}\,dt = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt + f^{(n)}(t)\left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right)\Big|_{x_0}^x$$

$$= \underbrace{f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}}_{= T_{x_0}^n f - T_{x_0}^{n-1} f} + \underbrace{\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt}_{R_{n+1}(x)} \quad □$$

17.3 Satz (Lagrange Form des Restgliedes)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig diffbar und $x_0 \in I$. Dann $\exists$ ein φ zw. x und x_0, sd. $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\varphi)}{(n+1)!}\cdot(x - x_0)^{n+1}$.

Beweis: MWS auf $R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$

$\Rightarrow \exists \varphi$ zw. x und x_0: $f^{(n+1)}(\varphi)\cdot\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\varphi)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=x_0}^{t=x}$

$= f(\varphi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Induktion ist keine legitime Beweismethode

Beweis durch vollst. Induktion

I.V:

$n=0$

0 ist in der Informatik und Mathematik ein Symbol für „falsch"

⇒ Ind. für $n=0$ gilt nicht. ok ✓

Ind. Beh.: Aussage sei für bel. n gezeigt.

Ind. Schritt: $n \rightsquigarrow 0+n+1$

Bei Auswertung dieses Ausdrucks steht vorne was Falsches, somit ist der Ausdruck falsch und die Ind. schlägt fehl für n+1. wie gewünscht ok. □

Beispiel: $f(x)=\sin(x)$; $x_0=0$

$(T_0^{2n+1}\sin)(x) = x - \frac{x^3}{3!} \dots$ bis $2n+1$

Fehlerabschätzung

$|R_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leq \varepsilon < 1 \Leftrightarrow (n+1)\ln(R) \leq \ln(\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$

$\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \leq \int_1^{n+1}\ln(x)dx = (x\ln(x)-x)\Big|_1^{n+1} = n+1(\ln(n+1)) - (n+1) + 1$

$(n+1)\ln(R) \leq \ln(\varepsilon) + (n+1)\ln(n+1) - n \Leftrightarrow R \leq \varepsilon^{1/n+1}(n+1) \cdot e$

$\leq \frac{n+1}{e}$.

$\frac{1}{\infty}=0$

$\infty \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{\infty}} \cdot \cancel{\infty} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{1} = 0$

ok. V□

$\Rightarrow \infty \cdot 0 \neq 0$

$\Rightarrow 0$ hat inverse!

Bsp.: $f(x) = (1+x)^\alpha$ z.B. $\alpha = \frac{1}{2}$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1-x)^{\alpha-k}$

$\Rightarrow T_0^n f = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$, wobei $\binom{\alpha}{k}$ die Binom. koeff. verallgemeinert.

$\alpha \in \mathbb{Z}_{>0} \underset{n\geq\alpha}{\Rightarrow} (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ die Binom. Formel

17.6. Definition

Man kann C anordnen, der Rand ist aber zu klein.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ∞-mal diffbar, $x_0 \in I$. Dann heißt $(T_{x_0}f) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ die Tangentenreihe von f im EP x_0. $T_{x_0}f$ ist eine Potenzreihe in $(x-x_0)$.

Bsp: a) $(T_0\exp)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. def. Reihe der exp. Fkt. 17.7

b) $(T_0(1+x)^\alpha)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$. Frage: konv. die TR gegen f?

Leider gilt 1) Konv.rad einer TR kann $R=0$ sein.

2) Selbst wenn $R>0$ gilt für $x \in]x_0-R, x_0+R[$ nicht notwendig $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Beh: f ist ∞-oft diffbar und $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n$.

$T_0 f = 0 \neq f(x)$