Igor Schlegel

1.21 Satz (binomische Formel)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k .$$

Beweis: Induktion nach n.

Anfang $n=1$ $\quad (a+b)^1 = a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a+b$

Bemerkung: $\binom{n}{k} = 0$ Falls $k \notin \{0, 1, \ldots n\}$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \binom{n}{k} \cdot b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \quad \text{Verschiebung des Summationsindex} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad \square
\end{aligned}$$

Pascalsche Dreieck $\qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

```
        1           | 0
      1   1         | 1
    1   2   1       |
  1   3   3   1     |
1   4   6   4   1   |
        ...         v n
```

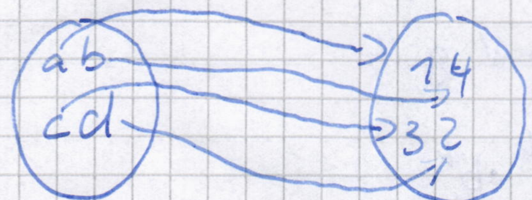
2. Abbildungen

2.1. Definition

Seien M und N zwei Mengen eine Abbildung $F: M \to N$ ist eine Vorschrift die jedem Element $x \in M$ ein Element $F(x) \in N$ zuordnet.

Schreibweise: $x \mapsto F(x)$

Beispiel: M N



spezifiert eine Abbildung

Diese Abb. ist werder In- noch Surjektiv.

Für $A \subset M$ heißt $F(A) = \{F(a) \mid a \in A\}$ das Bild von A

Für $B \subset N$ heißt $F^{-1}(B) = \{x \in M \mid F(x) \in B\}$ das Urbild der Menge B.

Im Bsp: $F^{-1}(\{1\}) = \{a, b\}$

$F^{-1}(\{2\}) = \{\emptyset\}$

Für einelementige Mengen schreiben wir $F^{-1}(y) = F^{-1}(\{y\})$

Im Bsp: $F^{-1}(1) = \{a, b\}$

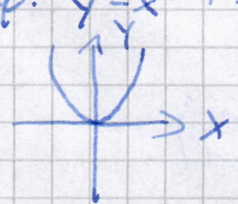
Ist $F: M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$ eine Teilmenge, dann heißt $F|_A: A \to N$ mit $F|_A(a) = F(1)$ $\forall a \in A$ die auf A eingeschränkte Abbildung.

2.2 Die Menge

$$\Gamma_F = \{(x, y) \in M \times N \mid y = F(x)\}$$

heißt die Abbildung $F: M \to N$

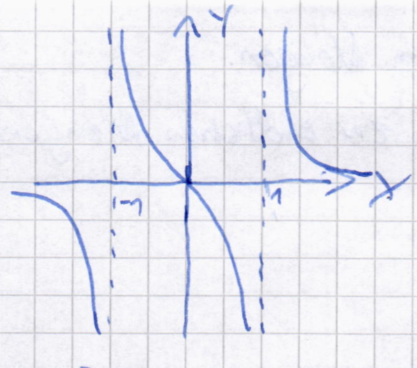
Bsp: $y = x^2$ $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ hat die Parabel als Graphen.



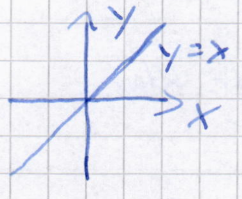
Aus dem Graphen von F läßt sich die Abbildung von F Rekonstruieren. Es gilt $F(x_0) = y_0$ genau dann wenn $\Gamma_F \cap (\{x_0\} \times N) \subset M \times N = \{x_0, y_0\}$ gilt

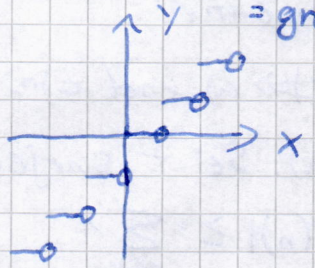
2.3 Die am häufigsten verwendeten Abbildungen sind reellwertige Funktionen $F: D \to \mathbb{R}$ wobei (in diesem Semester) $D \subset \mathbb{R}$ häufig gilt. D heißt Definitionsbereich von F.

Bsp: Die Formel $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$ definiert eine Funktion $F: D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$



Bsp: $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ F(x) = x$ entier $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \text{entier}(x) = \lfloor x \rfloor$
= größte Zahl ganze Zahl $\leq x$





Zwei Eigenschaften von Abbildungen verdienen einen Namen.

2.4 Definition Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung

F heißt <u>injektiv</u>, wenn für $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ auch ~~und~~ $F(x_1) \neq F(x_2)$ gilt.

F heißt <u>surjektiv</u>, wenn für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.

F heißt <u>bijektiv</u>, wenn die Injektivitität und Surjektivität für F gilt.

Ist F bijektiv dann definieren wir die Umkehrabbildung ~~von~~ $F^{-1}: N \to M$ durch $F^{-1}(y) = x$ falls $F^{-1}(\{y\}) = \{x\}$

$F^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ da f surjektiv, und enthält höchstens 1 Element da f injektiv.

Bem: Für $F: M \to N$ beliebig ist $F^{-1}: 2^N \mapsto 2^M,\ B \mapsto F^{-1}(B)$

Zwei Interpretationen von F^{-1} haben wir also. Welche gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

F^{-1} könnte für reellwertige Funktionen die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{F(x)}$ bezeichnen.

Eine dritte Notation.

Eine bijektive Abbildung $F: M \to N$ erhalten die $F: M \to N$ bijektiv $\Rightarrow |M| = |N|$

Umgekehrt gilt für Abb. zw. endlichen Mengen:

2.6 Satz. Sei $F: M \to N$ eine Abbildung zw. endlichen Mengen mit $|M| = |N|$

Dann sind äquivalent

a) F ist injektiv

b) " " surjektiv

c) " " bijektiv

Beweis: c) ⇒ a) und c) ⇒ b) sind nach Def. klar.

zu b) ⇒ a): Sei F surjektiv. Dann gilt

$$\sum_{n \in N} |F^{-1}(n)| \geq \sum_{n \in N} 1$$

Andererseits $M = \dot{\bigcup}_{n \in N} F^{-1}(n)$ ist eine disjunkte Vereinigung, da jedes $x \in M$ genau ein Bild hat.

$$|M| = \sum_{n \in N} |F^{-1}(n)| \geq |N|$$

Es gilt Gleichheit also $|F^{-1}(n)| = 1$ für alle $n \in N$, d.h. F ist injektiv.

a) ⇒ b): Sei F injektiv.

Dann gilt $|M| = \sum_{n \in N} |F^{-1}(n)| \leq \sum_{n \in N} 1 = |N|$

$|M| = |N|$ es gilt Gleichheit, also $|F^{-1}(n)| = 1$ für alle $n \in N$, d.h. F ist surjektiv.

Also gilt $a \Leftrightarrow b$ und $a \wedge b \Rightarrow c$ gilt nach Definition.

2.7. Corollar (Schubfachprinzip)

Ist $F: M \to N$ eine injektive Abbildung.

Dann gilt $|M| \leq |N|$ oder anders formuliert:

Ist $|M| > |N|$ dann ist $F: M \to N$ nicht injektiv

2.8. Beispiel Es seien n^2+1 Punkte p_i in dem Quadrat $Q = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y < n\}$ gegeben. Dann gibt es zwei Punkte p_i und p_j mit $i \neq j$ mit Abstand $\operatorname{dist}(p_i, p_j) \leq \sqrt{2}$

Beweis: Wir zerlegen $Q = \dot{\bigcup}_{k,l=1}^{n} Q_{kl}$ wobei $Q_{kl} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} k-1 \leq x < k \\ l-1 \leq y < l \end{matrix} \right\}$

Q ist eine disjunkte Vereinigung mit n^2 Quadraten.

Wir definieren eine Abbildung

$F: \{1, 2, \ldots n^2+\} \to \{1, 2 \ldots n\} \times \{1, 2 \ldots n\}$

$F(i) = (k, l)$ falls $p_i \in Q_{kl}$

Nach dem Schuhfachprinzip gilt $i \neq j$ so $p_i, p_j \in Q_{kl}$

nach Pythagoras ist die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat.

$(1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2) \Rightarrow dist(p_i, p_j) \leq \sqrt{2}$ $\square$

2.10 Zu Abbildung noch etwas Notation

<u>Def</u>: N, M zwei Mengen. Dann bezeichnet

$N^M = \{F: M \to N \mid F \text{ ist eine Abbildung}\} (\hookrightarrow 2^{M \times N})$.

$F \to \Gamma_F$.

Dies ist mit der Notation 2^M verträglich.

$\{0, 1\}^M = \{f: M \to \{0, 1\}\}$ und 2^M stehen in Bijektion.

$2^M \to \{0, 1\}^M$

$A \mapsto \chi_A$ wobei $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ die Chrakteristische Funktion von A ist.

$2^M \to \{0, 1\}^M$

$A \mapsto \chi_A$ ist bijektiv

die Umkehrabbildung ist

$2^M \longleftarrow \{0, 1\}^M$

$f^{-1}(1) \longleftarrow f$

Für endliche Mengen M, N gilt

$|N^M| = |N|^M$.

<u>2.11. Def</u>: Sind $f: M \to N$ und $g: N \to L$ zwei Abbildungen dann ist die Komposition $g \circ f: M \to L$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ definiert.

<u>Komposition von Abbildungen ist assoziativ.</u>

$f: M \to N$, $g: N \to L$, $h: L \to K$ dann gilt

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend right=50, "(h\circ g)\circ f"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & L \arrow[r, "h"] & K
\end{tikzcd}
$$

Beweis:

$(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

$= (h\circ g)(f(x) = ((h\circ g)\circ f)(x)$

Dies gilt für alle x, also sind die Abbildungen gleich.