UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 26.11.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 5 19.11.2015

Aufgabe 1. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu : 2^X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

heißt *äußeres Maß*, falls

(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$
(iii) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ gilt $\mu\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Sei nun $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mu : 2^X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß. Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{B \subset X \mid \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) \text{ für alle } A \subset X\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ stabil unter Bildung von Komplementen, endlichen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen ist.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset 2^X$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$. Ferner sei

$$\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$. Wir definieren

$$\mu^* : 2^X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad \mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in \mathcal{E} \text{ mit } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Big\},$$

wobei wir $\mu^*(A) := \infty$ setzen, falls keine $E_i \in \mathcal{E}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$ existieren. Zeigen Sie, dass μ^* ein äußeres Maß auf 2^X definiert.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass f messbar bzgl. den Borelschen σ-Algebren ist.

Aufgabe 4. Seien $f_n := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ $(n \in \mathbb{N})$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx,$$

wobei der Limes inferior der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise zu verstehen ist.